УДК 519.6

П.И. Стецюк, А.В. Фесюк
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕПАРАБЕЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОДНИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ И ГРАНИЦАМИ НА ПЕРЕМЕННЫЕ

Исследован вопрос о построении эффективного алгоритма для решения задачи минимизации строго выпуклой сепарабельной квадратичной функции при одном ограничении-равенстве и двусторонних ограничениях на переменные. Рассмотрена двойственная задача, которая связана с максимизацией гладкой вогнутой функции от одной переменной, и исследованы ее свойства. Построены алгоритмы решения двойственной задачи на основе метода дихотомии и ее ускорения, которое использует рекордное значение вогнутой функции. Приведены результаты вычислительного эксперимента по сравнению обычного и ускоренного двойственных методов.

Досліджено питання про побудову ефективного алгоритму для розв'язання задачі мінімізації строго опуклої сепарабельної квадратичної функції за одного обмеження-рівності та двосторонніх обмеженнях на змінні. Розглянуто двоїсту задачу, пов'язану з максимізацією гладкої увігнутої функції від однієї змінної, та досліджено її властивості. Побудовано алгоритми розв'язання двоїстої задачі на основі методу дихотомії та її прискорення, яке використовує рекордне значення увігнутої функції. Наведено результати обчислювального експерименту з порівняння звичайного та прискореного двоїстих методів.

The topic of constructing an efficient algorithm for solving the problem of minimization of strictly convex separable quadratic function with a single equality constraint and bilateral constraints on variables is investigated. We considered the dual problem, which is connected with maximization of the smooth concave function of one variable, and studied its properties. Algorithms for solving the dual problem on the basis of the dichotomy and its acceleration, which uses a record value of concave function, were developed. The results of computational experiments comparing normal and accelerated dual methods are given.

Ключевые слова: задача квадратичного программирования, сепарабельная квадратичная функция, двусторонние ограничения на переменные, частичная функция Лагранжа, двойственная задача, метод дихотомии, сдвиг по рекорду вогнутой функции, вычислительный эксперимент.

Введение. При построении декомпозиционных алгоритмов для решения задач минимизации сепарабельной квадратичной функции при ограничениях производственно-транспортного вида [1] требуется в качестве подзадачи многократно решать следующую задачу квадратичного программирования:

$$x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) = \arg\min_{x\in R^n}\left(f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n c_i x_i \right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i = b, \quad l_i \le x_i \le u_i,\ i=1,\dots,n, \tag{2}$$

где $d_i > 0$, $u_i \ge l_i$, $i=1,\dots,n$, а b такое, что $\sum_{i=1}^n l_i \le b \le \sum_{i=1}^n u_i$. Её характеризует одно ограничение-равенство и двусторонние ограничения на переменные.

В работе [2] рассмотрен частный случай задачи (1)–(2) в виде

$$x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) = \arg\min_{x\in R^n}\left(f_1(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{Q} x_i^2 + \sum_{i=1}^n s_i x_i \right) \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i = Q, \quad x_i \ge 0,\ i=1,\dots,n, \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ и $Q > 0$. Для него получен следующий результат.

Утверждение 1 [2]. *Положительные компоненты решения задачи (3)-(4) вычисляются по формулам* $x_i^* = \dfrac{Q}{2\varepsilon}(\alpha^* - s_i)$, $i : s_i < \alpha^*$, $i = 1,\dots n$, *где* α^* *– единственный корень непрерывной, кусочно-линейной, неубывающей функции* $\varphi(\alpha) = \dfrac{Q}{2\varepsilon}\left[\sum_{i:s_i<\lambda}(\alpha - s_i)\right] - Q$.

Задачи, подобные (3)–(4), возникают, когда применяется ε-квадратич-ное сглаживание при решении задач линейного программирования путем декомпозиции по ограничениям [1, с. 132–136]. Задачу (3)–(4) требуется многократно решать для задач производственно-транспортного планиро-вания, если нет ограничений сверху на переменные. Алгоритм на основе утверждения 1 использует метод дихотомии для нахождения нуля функ-ции $\varphi(\lambda)$ и способен обеспечить нахождение решения $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ с требуемой точностью.

Ниже для решения задачи (1)–(2) построим двойственный алгоритм, который требует максимизации гладкой вогнутой функции от одной переменной. В отличие от алгоритма на основе утверждения 1 двойственный алгоритм можно ускорить, используя свойство вогнутости одномерной функции и рекордное значение функции. Насколько удается для двойственного алгоритма ускорить метод дихотомии, обсудим ниже.

Двойственная задача и ее свойства. Двойственный алгоритм будет базироваться на свойстве прямой задачи (1)–(2), которое означает, что, решая двойственную к прямой задачу, мы одновременно находим и оптимальные значения переменных в прямой задаче. Это свойство отражает следующая лемма.

Лемма 1. *Задача (1)–(2) имеет единственное решение x^*, компонен-ты которого вычисляются по формуле*

$$x_i^* = \min\left(\max\left(l_i, -\frac{c_i + \lambda^*}{d_i}\right), u_i\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где λ^* – точка максимума вогнутой гладкой функции

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(\lambda) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda) - b\right), \tag{6}$$

где $x_i(\lambda) = \min\left(\max\left(l_i, -\frac{c_i + \lambda}{d_i}\right), u_i\right), \quad i = 1, \ldots, n.$ *Производная и значение функции $\psi(\lambda)$ в точке $\bar{\lambda}$ вычисляются по формулам*

$$\nabla\psi(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\bar{\lambda}) - b; \quad \psi(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2(\bar{\lambda}) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}\nabla\psi(\bar{\lambda}). \tag{7}$$

Доказательство. Если λ – множитель Лагранжа, который соответствует ограничению-равенству в (2), то частичная функция Лагранжа для задачи (1)–(2) имеет следующий вид:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - b\right).$$

Поэтому двойственная задача связана с максимизацией вогнутой функции

$$\psi(\lambda) = \min_{l_i \le x_i \le u_i, i=1,\ldots,n} L(x, \lambda) = \min_{l_i \le x_i \le u_i, i=1,\ldots,n} \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - b\right)\right\},$$

которая зависит от одной переменной λ. Вогнутость функции $\psi(\lambda)$ следует из взятия операции минимума по переменным $x = (x_1, ..., x_n)$ от функции $L(x, \lambda)$, которая линейно зависит от переменной λ.

Учитывая, что функция Лагранжа может быть записана в виде

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} d_i x_i^2 + (c_i + \lambda) x_i\right) - \lambda b,$$

функцию $\psi(\lambda)$ можно записать в таком виде:

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \min_{l_i \le x_i \le u_i}\left(\frac{1}{2} d_i x_i^2 + (c_i + \lambda) x_i\right) - \lambda b.$$

Отсюда легко видеть, что функция $\psi(\lambda)$ содержит задачу минимизации по $x = \{x_1, ..., x_n\}$, которая является суммой минимумов одномерных строго выпуклых по x_i квадратичных функций $\psi_i(x_i) = \frac{1}{2} d_i x_i^2 + (c_i + \lambda) x_i$, $i = 1, ..., n$. Эта задача имеет единственное решение $x(\lambda) = \{x_1(\lambda), ..., x_n(\lambda)\}$, компоненты которого равны

$$x_i(\lambda) = \min\left(\max\left(l_i, -\frac{c_i + \lambda}{d_i}\right), u_i\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Действительно, квадратичная функция $\psi_i(x_i) = \frac{1}{2} d_i x_i^2 + (c_i + \lambda) x_i$ при $d_i > 0$ является строго выпуклой по переменной x_i и имеет единственную точку минимума $x_i^*(\lambda) = -\frac{c_i + \lambda}{d_i}$. Поэтому единственной будет и точка минимума функции $\psi_i(x_i)$ на интервале $l_i \le x_i \le u_i$. Эта точка будет совпадать с нижней границей l_i, если $x_i^*(\lambda) \le l_i$, и с верхней границей u_i, если $x_i^*(\lambda) \ge u_i$.

Учитывая, что $x(\bar\lambda) = (x_1(\bar\lambda),...,x_n(\bar\lambda))$ определяется единственным образом, в точке $\bar\lambda$ функция $\psi(\lambda)$ непрерывно дифференцируемая. При этом производная функции $\psi(\lambda)$ в точке $\bar\lambda$ определяется по формуле $\nabla\psi(\bar\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\bar\lambda) - b$ (см. теорему 1.18 [3]). Это доказывает как тот факт, что двойственная задача связана с нахождением точки минимума вогнутой гладкой функции $\psi(\lambda)$, которая определена формулой (6), так и формулу (7), где значение функции $\psi(\bar\lambda)$ определено через вычисленную ранее производную $\nabla\psi(\bar\lambda)$.

И последнее, справедливость формулы (5) следует из того, что из теории двойственности имеем $\psi^* = \psi(\lambda^*) = f(x^*) = f^*$. Здесь не возникает проблем, связанных с отсутствием конечнозначного максимума $\psi^* = \psi(\lambda^*)$, так как задача (1)–(2) имеет решение в силу того, что при условии $\sum_{i=1}^{n} l_i \le b \le \sum_{i=1}^{n} u_i$ ограничения (2) являются совместными. Точка λ^* будет единственной тогда, когда оптимальное решение задачи (1)–(2) содержит хотя бы одну компоненту x_i^*, $i \in \{1,...,n\}$, которая не является граничной точкой интервала $[l_i, u_i]$. Если решение в задаче (1)–(2) достигается в вершинах гиперкуба $[l_i, u_i]$, $i = 1,...,n$, то функция $\psi(\lambda)$ может иметь много точек максимума. Но всем этим точкам в силу формулы (5) будет соответствовать одна и та же вершина гиперпараллелепипеда $[l_i, u_i]$, $i = 1,...,n$. Доказательство леммы завершено.

Лемма 1 дает возможность строить двойственные алгоритмы решения задачи (1)–(2), и конкретный алгоритм будет определяться выбранным методом для максимизации одномерной функции $\psi(\lambda)$.

О двойственном алгоритме для задачи (3)-(4). Для задачи (3)–(4), которая является частным случаем задачи (1)–(2), лемму 1 можно упростить. Двойственные алгоритмы для решения задачи (3)–(4) будет определять следующая лемма.

Лемма 2. *Задача (3)–(4) имеет единственное решение x^*, компоненты которого вычисляются по формуле*

$$x_i^* = \max\left(0, -\frac{Q}{2\varepsilon}\left(s_i + \lambda^*\right)\right), \quad i = 1,\dots,n, \tag{8}$$

где λ^* – единственная точка максимума вогнутой гладкой функции

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\varepsilon}{Q}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} s_i x_i(\lambda) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda) - Q\right), \tag{9}$$

где $x_i(\lambda) = \max\left(0, -\frac{Q}{2\varepsilon}\left(s_i + \lambda\right)\right)$, $i = 1,\dots,n$. Производная и значение функции $\psi_1(\lambda)$ в точке $\bar\lambda$ вычисляются по формулам

$$\nabla\psi_1(\bar\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\bar\lambda) - Q; \ \psi_1(\bar\lambda) = \frac{\varepsilon}{Q}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\bar\lambda) + \sum_{i=1}^{n} s_i x_i(\bar\lambda) + \bar\lambda\nabla\psi_1(\bar\lambda). \tag{10}$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 с тем отличием, что ряд формул упрощается из-за отсутствия в задаче (3)–(4) верхних границ на переменные x_i, $i = 1,...,n$. Кроме того, поскольку задача (3)–(4) всегда имеет решение, то не требуется никаких дополнительных преположений для того, чтобы у функции $\psi_1(\lambda)$ существовал конечнозначный максимум $\psi_1^* = \psi_1(\lambda^*)$, который достигается в единственной точке λ^*.

Лемма 2 дает альтернативный способ решения задачи (3)–(4) по отношению к тому, который получается при использовании утверждения 1. Так, если утверждение 1 требует процедуры нахождения нуля кусочно-линейной, неубывающей одномерной функции $\varphi(\alpha)$, то лемма 2 требует нахождения максимума вогнутой гладкой одномерной функции $\psi_1(\lambda)$. Примеры графиков обеих функций даны на рис. 1 и 2.

Они соответствуют такой задаче квадратичного программирования:

$$x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) = \arg\min_{x\in R^{10}}\left(f_1(x) = \sum_{i=1}^{10} 0.01x_i^2 + \sum_{i=1}^{10} ix_i\right) \tag{3a}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10, \quad x_i \ge 0, i = 1,\dots,10. \tag{4a}$$

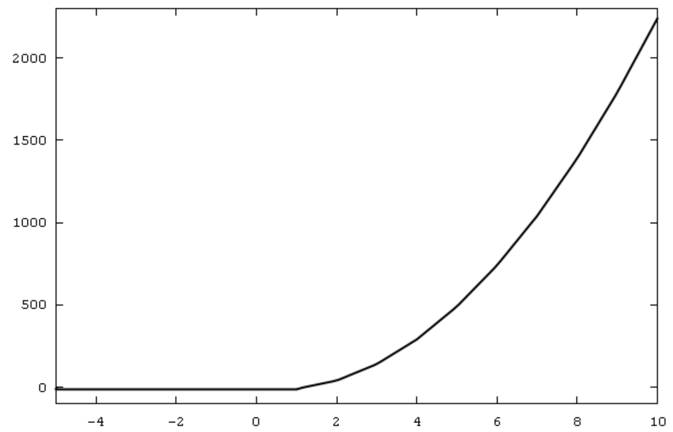

Рис. 1. График функции $\varphi(\alpha)$ для задачи (3а)–(4а) при $\alpha \in [-5,10]$

В задаче (3а)-(4а) всего десять переменных, $\varepsilon = 0.1$, $Q = 10$, а при линейных членах коэффициенты выбраны такими: $s_1 = 1, s_2 = 2, ..., s_{10} = 10$.

Из рис. 1 видим, что кусочно-линейная, неубывающая функция $\varphi(\alpha)$ очень напоминает гладкую експоненту. Это означает, что функция $\varphi(\alpha)$ содержит очень большое количество линейных кусков.

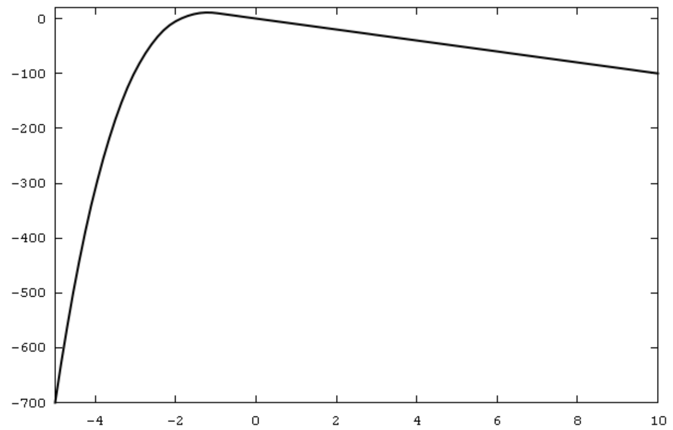

Рис. 2. График функции $\psi_1(\lambda)$ для задачи (3а)–(4а) при $\lambda \in [-5,10]$

Из рис. 2 легко видеть, что до точки максимума скорость роста функции намного больше, чем скорость уменьшения функции после точки максимума.

Двойственные алгоритмы (на основе метода дихотомии). Если для максимизации функции $\psi(\lambda)$ выбрать метод дихотомии, то для решения задачи (1)–(2) можно построить два двойственных алгоритма. Первый алгоритм будет гарантировать локализацию точки максимума в интервале, который с каждой последующей итерацией уменьшается в два раза. Для него необязательным является вычисление значения функции, а достаточно только вычисления производной. Второй алгоритм будет уточнять локализацию за счет «сдвига по вогнутости» максимизируемой функции, который использует рекорное значение функции $\psi(\lambda)$. Сдвиг по вогнутости следует из неравенства $\psi(\lambda) \le \psi(\bar{\lambda}) + \nabla\psi(\bar{\lambda}) * (\lambda - \bar{\lambda})$, которое выполняется при любых λ и $\bar{\lambda}$ [4]. Для второго алгоритма требуется вычислять значения функции и производной в точке.

Двойственный алгоритм на основе метода дихотомии требует только вычисления производной $g = \nabla\psi(\lambda)$. Он имеет следующий вид.

Инициализация. На итерации $k = 0$ имеем λ_1 и λ_2 такие, что точка максимума λ^* лежит внутри интервала $[\lambda_1, \lambda_2]$, и точность ε, с которой будем находить приближение к λ^*. Перейдем к очередной итерации со значениями λ_1 и λ_2.

Итерационный процесс. Пусть на k-й итерации найдены λ_1 и λ_2. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполняем такие действия.

1. Вычислим $\lambda_k = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2. Если $\lambda_2 - \lambda_1 < \varepsilon$, то ОСТАНОВ($\lambda^* = \lambda_k$ и $itn = k$).

3. Вычислим производную $g_k = \nabla\psi(\lambda_k)$. Если $g_k > 0$, то полагаем $\lambda_1 = \lambda_k$, иначе полагаем $\lambda_2 = \lambda_k$.

4. Переходим к $(k+1)$-й итерации с новыми λ_1 и λ_2.

Ускоренный двойственный алгоритм требует вычисления как произ-водной $g = \nabla\psi(\lambda)$, так и значения функции $\psi(\lambda)$. Он имеет такой вид.

Инициализация. На итерации $k=0$ имеем λ_1 и λ_2 такие, что $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$, и точность ε, с которой требуется найти приближение к λ^*. Вычислим $g_1 = |\nabla\psi(\lambda_1)|$, $\psi_1 = \psi(\lambda_1)$, и $g_2 = |\nabla\psi(\lambda_2)|$, $\psi_2 = \psi(\lambda_2)$. Установим рекордное значение функции $\psi_r = \max\{\psi_1, \psi_2\}$. Вычислим уточненные границы интервала: $\lambda_1 \Box \lambda_1 + \dfrac{\psi_r - \psi_1}{g_1}$ и $\lambda_2 \Box \lambda_2 - \dfrac{\psi_r - \psi_2}{g_2}$. Перейдем к очередной итерации со значениями λ_1 и λ_2.

Итерационный процесс. Пусть на k-й итерации найдены λ_1, ψ_1, g_1 и λ_2, ψ_2, g_2. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполним такие действия.

1. Вычислим $\lambda_k = \dfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2. Если $\lambda_2 - \lambda_1 < \varepsilon$, то ОСТАНОВ($\lambda^* = \lambda_k$ и $itn = k$).

3. Вычислим $g_k = \nabla\psi(\lambda_k)$, $\psi_k = \psi(\lambda_k)$. Если $g_k > 0$, то полагаем $\lambda_1 = \lambda_k, \psi_1 = \psi_k, g_1 = |g_k|$, иначе полагаем $\lambda_2 = \lambda_k, \psi_2 = \psi_k, g_2 = |g_k|$.

4. Вычислим новый рекорд $\psi_r \Box \max\{\psi_r, \psi_k\}$ и уточним границы $\lambda_1 \Box \lambda_1 + \dfrac{\psi_r - \psi_1}{g_1}$ и $\lambda_2 \Box \lambda_2 - \dfrac{\psi_r - \psi_2}{g_2}$.

5. Переходим к $(k+1)$-й итерации с новыми λ_1, ψ_1, g_1 и λ_2, ψ_2, g_2.

Для сравнения обоих двойственных алгоритмов была разработана программа на МАТЛАБ-подобном некоммерческом языке GNU Octave. В программе использовался параметр-индикатор **shift**, который определяет, будет или не будет использоваться ускорение за счет сдвига по вогнутости максимизируемой функции. Если **shift=0**, то программа реализует первый алгоритм (метод дихотомии). Если **shift=1**, то программа реализует ускоренный вариант метода дихотомии. В силу такой реализации программы время, затраченное методом дихотомии, можно считать завышенным в два-три раза, так как в него входит и необязательное вычисление значения функции, а не только ее производной.

Вычисления проводились на компьютере Pentium 2.5GHz в системе WindowsXP/32 с использованием GNU Octave версии 3.0.0. Тестовые задачи генерировались с помощью **rand("seed", 2015) –** октавовского датчика случайных чисел с равномерным распределением на (0,1). В таблице приведены результаты вычислений для восьми задач (1)-(2) с количеством переменных от $n = 100$ до $n = 500000$. Для всех задач оптимальные значения λ находились с одной и той же точностью – $\varepsilon = 10^{-9}$.

№	n	Двойственный алгоритм (дихотомия)			Ускоренный двойственный алгоритм		
		itn	$time$	$\nabla\psi(\lambda_{itn})$	itn	$time$	$\nabla\psi(\lambda_{itn})$
1	100	40	0.0245	-6.5E-09	21	0.0057	-3.9E-08
2	500	40	0.0104	-1.0E-06	21	0.0062	1.1E-07
3	1000	40	0.0117	7.9E-10	20	0.0066	-3.9E-08
4	5000	40	0.0228	-8.1E-08	23	0.0141	8.0E-07
5	10000	40	0.0363	5.8E-08	21	0.0203	-3.8E-06
6	50000	40	0.1618	3.9E-08	22	0.0962	-2.5E-06
7	100000	40	0.4888	6.4E-08	21	0.2646	6.2E-06
8	500000	40	2.4039	-1.1E-06	21	1.3058	1.1E-06

Вычислительный эксперимент свидетельствует о том, что время решения задачи (1)-(2) двойственными алгоритмами незначительно зависит от количества переменных. Здесь время решения задач приведено в секундах. Количество итераций для ускоренного двойственного метода почти в два раза меньше, чем для двойственного метода с дихотомией. При этом окончание работы ускоренного метода происходит в точках с большей по норме производной и связано это с тем, что для учета сдвига по выпуклости приходится делить на малые величины, так как производная стремится к нулю по мере приближения точки к точке λ^*.

Заключение. В данной работе исследована возможность построения эффективных двойственных алгоритмов для решения задачи минимизации строго выпуклой сепарабельной квадратичной функции при одном ограничении-равенстве и двусторонних ограничениях на переменные. В их основе лежит задача максимизации гладкой вогнутой функции от одной переменной, которая соответствует двойственной задаче. Показано, что использование метода дихотомии позволяет строить эффективные по времени программные реализации двойственных алгоритмов для современных персональных компьютеров. Это означает, что разработанные алгоритмы можно использовать для решения подзадач в схемах декомпозиции по ограничениям в структурированных задачах линейного и квадратичного программирования.

Двойственные алгоритмы планируется применять при решении задач планирования оптимальной загрузки энергоблоков тепловых электростанций (ТЭС)[5]. В систему ограничений этих задач входят такие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} = E_t, \quad t \in \{1,...,T\}, \tag{11}$$

$$p_i^{low} \le x_{it} \le p_i^{up}, \quad i \in \{1,...,N\}, t \in \{1,...,T\} \tag{12}$$

где p_i^{low} и p_i^{up} – нижняя и верхняя границы на допустимые нагрузки энергоблока $i \in N$; E_t – электрическая нагрузка энергосистемы на плановый период $t \in \{1,...,T\}$; x_{it} – неизвестная электрическая нагрузка i-го энергоблока в интервале $t \in \{1,...,T\}$. Легко видеть, что ограничения (11),(12) при фиксированном интервале совпадают с ограничениями задачи (1)-(2).

Библиографические ссылки

1. **Михалевич, В.С.** Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования [Текст] / В.С. Михалевич, В.А. Трубин, Н.З. Шор. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
2. **Гершович, В.И.** Квадратичное сглаживание в декомпозиционном подходе к решению задач линейного программирования производственно-транспортного типа [Текст]/ В.И. Гершович, А.П. Лиховид, А.М. Приятель // Методы исследования экстремальных задач. – К.: 1988. – С. 55–61.
3. **Шор, Н.З.** Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация [Текст]/ Н.З. Шор, С.И. Стеценко. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. **Поляк, Б.Т.** Минимизация негладких функционалов [Текст] // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1969. – Т9, № 3. – С. 507–521.
5. **Стецюк, П.І.** Математичні моделі та програмне забезпечення в задачах енер-гетики [Текст] / П.І. Стецюк, М.Г. Журбенко, О.П. Лиховид. – К.: ПП «Ательє «Поліграфічний комплекс», 2012. – 64 с.

Надійшла до редколегії 03.06.2015