

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ДОВЖИНИ ХОРДИ В КОЛІ

Розглянуто закони розподілу довжини випадкової хорди в колі для різних моделей і порівняно їх із результатами статистичного моделювання. Отримано розподіли довжин хорд в еліпсі.

Рассмотрены законы распределения длины случайной хорды в круге для разных моделей и выполнено их сравнение с результатами статистического моделирования. Получены распределения длин хорд в эллипсе.

Considered the laws of distribution of the length of the random chord in a circle for different models and was comparing them with the results of statistical modeling. Received distributions of lengths of Hord in elipsi.

Ключові слова: закони розподілу, довжина хорди, статистичне моделювання.

Вступ. Для відомої задачі, спрощене формулювання якої таке: «Якщо хорда вибирається наздогад в заданому колі, то яка ймовірність того, що її довжина більша за радіус?» [3, с. 14], наведено варіанти відповідей для трьох різних моделей і зроблено висновок, що задача не має визначеного розв'язку [Там же, с. 47 – 48]. Аналогічна невизначеність має місце і в задачі «парадокс Бертрана» [2, с. 39, 178]. Нижче

розглянемо задачу про визначення законів розподілу довжини хорди в колі для різних моделей.

Маємо взаємне випадкове положення кола радіуса $r=1$ із центром в довільній точці $O(x, y)$ і прямої, яка перетинає коло (рис. 1). Довжина хорди AB однозначно визначена відстанню OC центра кола від прямої. Тоді

$$l_1 = |AB| = 2|AC| = 2\sqrt{1 - |OC|^2} = 2\sqrt{1 - y^2}. \quad (1)$$

Розглядаючи задачу як одновимірний варіант про монету на решітці, можна вважати Y випадковою величиною, яка для $l_1 \neq 0$ з однаковою ймовірністю набуває будь-якого значення на інтервалі $[-1, 1]$. Тоді щільність її розподілу $f(y) = 0,5$ за умови $-1 < y < 1$.

Обчислимо середню довжину хорди, яка дорівнює математичному сподіванню функції $l_1 = \varphi(y)$:

$$M(l_1) = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y) f(y) dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} \cdot 0,5 dy = \dots = \frac{\pi}{2} = 1,572. \quad (1a)$$

Розглянемо іншу модель визначення довжини хорди (рис. 2). Нехай центр кола збігається з початком координат, тоді його рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Враховуючи ізометричність фігури, точку B виберемо на осі x , отже, координати кінців хорди $A(x_A, y_A)$, $B(1, 0)$. Тоді

$$\begin{aligned} l_2 = |AB| &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(x_A - 1)^2 + (\sqrt{1 - x_A^2} - 0)^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot (1 - x_A)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де величина x_A набуває довільного значення на інтервалі $(-1, 1)$. За рівномірним законом розподілу маємо $f(x_A) = 0,5$, де $-1 < x_A < 1$, і середня довжина хорди

$$M(l_2) = \int_{-1}^1 \sqrt{2 \cdot (1 - x_A)} \cdot 0,5 dx = 1,333. \quad (2a)$$

для обчислення довжини випадкової хорди, центральним кутом α (рис. 3), який набуває інтервалі $(0, 2\pi)$. У такому випадку

Наведемо ще одну модель коли вона вимірюється довільних значень на

$$l_3 = |AB| = 2 \cdot |AC| = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

За рівномірним законом умови $0 < \alpha < 2\pi$. Обчислимо

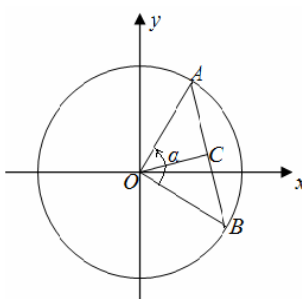


Рис. 3. Виразення хорди через центральний кут

розподілу щільність розподілу $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$ за середню довжину хорди для цієї моделі:

$$M(l_3) = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} d\alpha = \dots = \frac{4}{\pi} = 1,273. \quad (3a)$$

Аналогічний вираз отримаємо і для моделі, коли полюс розташований на самому колі, а довжина хорди виражена через кут β між дотичною і хордою ($0 < \beta < \pi$).

Постановка задачі. Різні відповіді у наведених моделях свідчать про те, що припущення про закони розподілу складових елементів моделей не завжди є слушними. Визначимо закони розподілу довжини хорди l для різних моделей.

Для першої моделі з виразу $l_1 = 2\sqrt{1-y^2}$ отримуємо $y = \frac{\sqrt{4-l_1^2}}{2}$ і похідну $y' = \frac{-l_1}{2\sqrt{4-l_1^2}}$. На інтервалі $(-1, 0)$ функція $l_1 = \varphi(y)$ зростаюча, на інтервалі $(0, 1)$ – спадна. Тоді щільність розподілу $g(l_1)$ випадкової величини L становитиме [1, с. 86] $g(l_1) = f(l_1) \cdot |y'(l_1)| = \frac{l_1}{2\sqrt{4-l_1^2}}$. Отже, щільність розподілу $g(l_1)$ і

інтегральна функція розподілу $G(l_1)$ мають вирази

$$g(l_1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_1 < 0 \\ \frac{l_1}{2\sqrt{4-l_1^2}}, & \text{якщо } 0 \leq l_1 \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } l_1 > 2 \end{cases}, \quad G(l_1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_1 < 0 \\ \frac{2-\sqrt{4-l_1^2}}{2}, & \text{якщо } 0 \leq l_1 \leq 2. \\ 1, & \text{якщо } l_1 > 2 \end{cases}. \quad (16)$$

Для такого закону розподілу середнє значення довжини хорди (математичне сподівання) $M(l_1) = \int_0^2 l_1 \cdot g(l_1) dl = \frac{\pi}{2} = 1,572$, дисперсія $D(l_1) = 0,199$. Як бачимо, середня довжина хорди за цією моделлю дорівнює чверті довжини кола.

Для другої моделі $l_2 = \sqrt{2 \cdot (1-x)}$, де $f(x) = 0,5$, $-1 < x < 1$, отримуємо $x = 1 - 0,5 \cdot l_2^2$; $|x'| = l_2$, щільність розподілу та функція розподілу відповідно дорівнюють

$$g(l_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_2 < 0 \\ 0,5 \cdot l_2, & \text{якщо } 0 \leq l_2 \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } l_2 > 2 \end{cases}, \quad G(l_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_2 < 0 \\ 0,25 \cdot l_2^2, & \text{якщо } 0 \leq l_2 \leq 2. \\ 1, & \text{якщо } l_2 > 2 \end{cases}. \quad (26)$$

Математичне сподівання $M(l_2) = 1,333$, дисперсія $D(l_2) = 0,222$.

Для третьої моделі $l_3 = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, де $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$, де $0 < \alpha < 2\pi$. Здійснюючи перетворення $\alpha = 2 \arcsin \frac{l_3}{2}$, $\alpha' = \frac{2}{\sqrt{4-l_3^2}}$, отримуємо

$$g(l_3) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_3 < 0 \\ \frac{2}{\pi \sqrt{4-l_3^2}}, & \text{якщо } 0 \leq l_3 \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } l_3 > 2 \end{cases}, \quad G(l_3) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_3 < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{l_3}{2}, & \text{якщо } 0 \leq l_3 \leq 2. \\ 1, & \text{якщо } l_3 > 2 \end{cases}. \quad (36)$$

Математичне сподівання $M(l_3) = 1,273$, дисперсія $D(l_3) = 0,379$. Можна відмітити, що внаслідок першої важливої границі за $l_3 \rightarrow 0$ значення $g(l_3) \rightarrow 0,318$, що є мало прийнятним.

Метод розв'язування. Для порівняння різних моделей розглянемо узагальнену модель випадкового положення хорди в колі із застосуванням методу статистичних випробувань.

Центр кола радіусом $r=1$ розташований у початку координат. Випадковим чином на площині $ХОУ$ вибрано дві довільні точки $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$ (рис. 4). Через дві точки M і N завжди можна провести пряму $y=k \cdot x+b$, де $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $b = y_1 - k \cdot x_1$. Якщо пряма MN перетинає коло, то кінці хорди (точки A і B) шукають як точки перетину прямої і кола $x^2 + y^2 = 1$. Отримуємо

$$x_{A,B} = \frac{-k \cdot b \pm \sqrt{k^2 + 1 - b^2}}{k^2 + 1}, \quad y_{A,B} = k \cdot x_{A,B} + b.$$

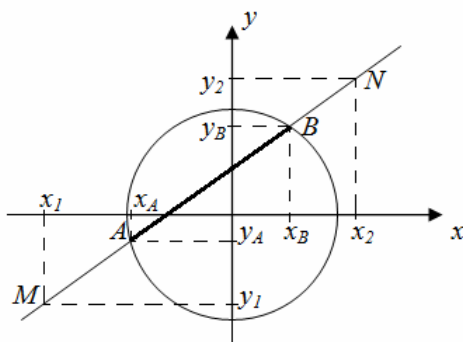


Рис. 4. Узагальнена модель хорди в колі

Якщо дискримінант $D = k^2 + 1 - b^2 < 0$, то пряма MN не перетинає коло. Обчислимо довжину випадкової хорди ($D > 0$):

$$l_4^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \quad \dots \quad l_4 = 2 \cdot \sqrt{\frac{k^2 + 1 - b^2}{k^2 + 1}}. \quad (4)$$

Координати точок M і N мають рівномірний закон розподілу в усій розглядуваній області, отже, можливі значення параметрів k і b прямої MN теж є випадковими на інтервалі $(-\infty; \infty)$, тому отримання аналітичного виразу закону розподілу довжини хорди через закони розподілу координат точок $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$ – складна задача. Методом статистичних випробувань здійснено оцінку емпіричних частот попадання значень довжини хорди на окремі інтервали відрізка $[0; 2]$. Повна кількість випробувань $n=1 \cdot 10^6$, з них тільки 15,2% перетинають коло, якщо розглядати область $(|x| < 10, |y| < 10)$; в області $(|x| < 5, |y| < 5)$ таких випробувань 29,3%.

Аналіз розподілу кутів нахилу хорд, який дорівнює $\arctg k$, показав деяку їх нерівномірність з локальними максимумами в околі значень $\pi/4$ і $3\pi/4$, що обумовлено більшими розмірами квадратних областей по діагоналях. Тому було розглянуто іншу модель, коли точки M і N вибирали на колі великого радіуса R і їх координати обчислювали за формулами $\begin{cases} x_1 = R \cos \alpha_1 \\ y_1 = R \sin \alpha_1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = R \cos \alpha_2 \\ y_2 = R \sin \alpha_2 \end{cases}$, де α_i – випадкові числа,

рівномірно розподілені на інтервалі $(0, 2\pi)$. Формули для обчислення довжин хорд залишилися незмінними, а величини $\arctg k$ мають рівномірний розподіл на інтервалі $(0, \pi)$.

Результати статистичних експериментів для різних $R \geq 2$ практично збігаються між собою і з результатами для квадратної області.

На рис. 5 наведено графіки теоретичних ймовірностей потрапляння на інтервали довжиною 0,1 для трьох теоретичних моделей і гістограма статистичних частот для узагальненої моделі. Гістограма збігається з ймовірностями першої моделі, інші графіки суттєво відрізняються.

Слід відмітити, що в ході складання алгоритму методу статистичних випробувань узагальненої моделі не висловлено жодних припущень про взаємне положення кола і прямої. Отже, відповідність першої моделі результатам статистичного моделювання може свідчити про слушність припущень про закон розподілу складників першої моделі.

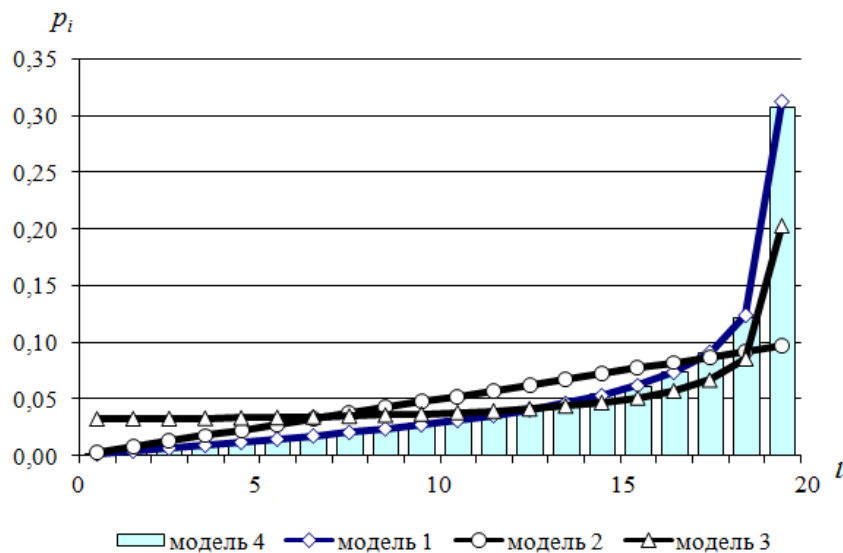


Рис. 5. Графіки теоретичних ймовірностей і статистичних частот

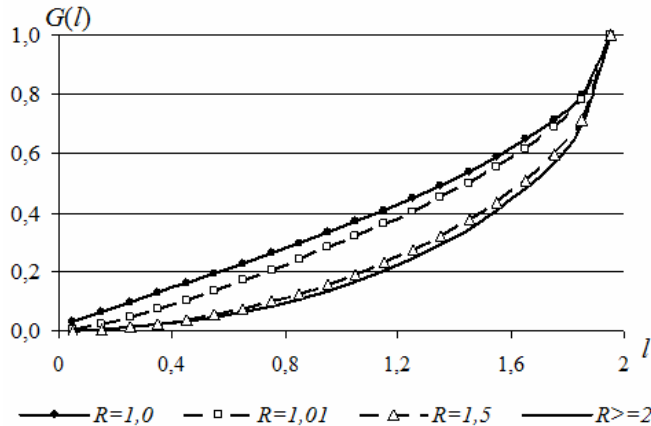
У той же час можна відмітити, що припущення про рівноймовірність результатів за рівномірної зміни параметрів другої і третьої моделей не зовсім слушне. Так, статистичні дослідження параметрів розподілу x_A і a другої і третьої моделей суттєво відрізняються від рівномірного у припущенні, що правдиві результати статистичного моделювання.

Можна також констатувати складний характер впливу параметрів моделей на довжину хорди. Як зазначено вище, за великого значення радіуса R великого кола результати практично не змінюються. Зі зменшенням величини радіуса R до 1 характер кривих накопичених частот, аналогів інтегральних функцій розподілу дещо змінюється.

Це видно на рис. 6. Якщо $R=1$, точки M і N узагальненої моделі збігаються з точками A і B , тому слід розглядати третю модель, коли фіксується точка – полюс на площині і оцінюється довжина хорди за неперервного повороту променя, що виходить з полюса. Результати статистичного моделювання за узагальненим алгоритмом, якщо $R=r=1$, повністю збігаються з даними третьої моделі (крива на рис. 6 для $R=1$ збігається з графіком інтегральної функції розподілу $G(l_3)$). Можна припустити, коли точки належать колу, не можна говорити про незалежність розподілів параметрів моделі.

Рис. 6. Графіки накопичених частот з різних величин радіуса області R

Щодо моделі з полюсом можна зробити такі зауваження. Для першої розглянутої моделі за малого



приросту аргументу Δy довжина хорди змінюється на величину $|\Delta l_1| = \left| 2\sqrt{1-(y+\Delta y)^2} - 2\sqrt{1-y^2} \right| = \dots \approx 2y \cdot \Delta y$ (застосовано розвинення в ряди). У цій моделі величина y змінюється рівномірно на інтервалі $(-1, 1)$. У третій моделі з полюсом в центрі в разі зміни кута на невелике значення $\Delta\alpha$ довжина хорди зміниться на величину $|\Delta l_3| = \left| 2\sin(\alpha + \Delta\alpha) - 2\sin\alpha \right| = \dots \approx 2\cos\alpha \cdot \Delta\alpha$, отже, більш обґрунтованим є припущення, що кут α змінюється на визначеному інтервалі таким чином, щоб косинус цього кута з однаковою ймовірністю набував значення на інтервалі $[-1, 1]$.

Візьмемо $\cos\alpha = z$, де $f(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z < -1 \\ 0,5, & \text{якщо } -1 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{якщо } z > 1 \end{cases}$. Тоді $\alpha = \arccos z$ і

$$l_3 = 2 \cdot \left| \sin \arccos z \right| = 2 \cdot \left| \sin \arcsin \sqrt{1-z^2} \right| = 2 \cdot \sqrt{1-z^2}, \text{ де } -1 < z < 1.$$

Отриманий вираз для довжини хорди повністю збігається з таким для першої розглянутої моделі, тому за слушності припущення про рівномірність розподілу косинуса α конфлікту між моделями не існує.

Результати. Розглянуті алгоритми обчислення довжини хорди в колі є окремим випадком визначення довжини хорди в еліпсі. Узагальнений алгоритм встановлення довжини хорди полягає в знаходженні точок перетину прямої $y=kx+d$ і еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Після викладок, аналогічних вище наведеним, отримуємо

$$l_E = \frac{2 \cdot a \cdot b}{b^2 + a^2 \cdot k^2} \sqrt{(1+k^2) \cdot (a^2 \cdot k^2 + b^2 - d^2)}, \quad (5)$$

де $D = a^2 \cdot k^2 + b^2 - d^2 > 0$ – дискримінант квадратного рівняння.

Випадок $a = b = 1$ є розглянуте вище коло. Поклавши $a = 1$ (більша піввісь, отже, $b < 1$), отримуємо вираз довжини хорди l_E через велику піввісь, $0 \leq l_E \leq 2$.

На рис. 7 наведено графіки статистичних частот довжин хорд для еліпсів з різними значеннями ексцентриситету $E = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, графік для $E=0$ збігається з таким для моделей 1 і 4 (хорда в колі).

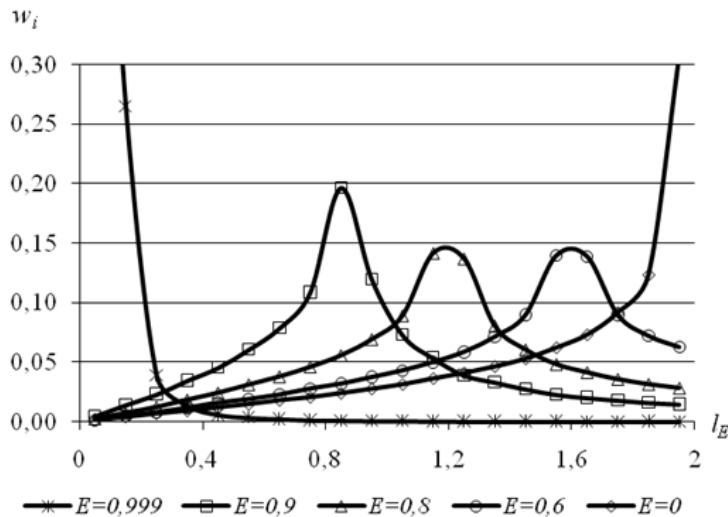


Рис. 7. Графіки відносних частот довжин хорд в еліпсі

Далі (див. таблицю) наведено значення середніх довжин \bar{l}_E хорд в еліпсах з різним ексцентриситетом E (виражені в одиницях довжини більшої півосі a)

Значення середніх довжин хорд в еліпсі

E	0	0,6	0,8	0,9	0,999
\bar{l}_E	$1,56a$	$1,39a$	$1,16a$	$0,913a$	$0,100a$

Оскільки еліпс не є ізометричною фігурою, перша і друга моделі визначення довжини хорди в колі не можуть бути застосовані. Аналог третьої моделі для еліпса може бути складений у такому вигляді. На лінії еліпса, півосі якого дорівнюють a і b (див. рис. 8), вибирають дві довільні точки A і B , координати яких у полярній системі координат

$$x_A = a \cdot \cos \alpha, \quad y_A = a \cdot \sin \alpha, \quad x_B = b \cdot \cos \beta, \quad y_B = b \cdot \sin \beta,$$

де α і β – довільні кути з інтервалу $(0, 2\pi)$. Тоді довжина хорди

$$l_E = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 2a \cdot \left| \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = 2a \cdot |\sin \gamma| \cdot \sqrt{1 - E^2 \cdot \cos^2 \delta}, \quad (6)$$

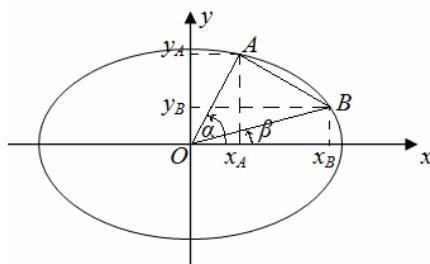


Рис. 8. Визначення довжини хорди в еліпсі

де E – ексцентриситет еліпса, а кути γ і δ мають симетричні трикутні розподіли на інтервалах $(-\pi, \pi)$ і $(0, 2\pi)$ відповідно. У випадку $E=0$ отримуємо формулу (3) для довжини хорди в колі. Розподіл модуля $\sin \gamma$ збігається з розподілом $\sin \varphi$, де значення φ рівномірно розподілені на інтервалі $(0, \pi)$, тому для обчислення за формулою (6) слід застосовувати зауваження до моделі 3 і рівномірний закон розподілу кутів під знаком тригонометричних функцій замінити на рівномірний закон розподілу значень їх косинусів.

Бібліографічні посилання

1. **Авраменко, В.І.** Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст]: навч. посіб. / В. І. Авраменко, І. К. Карімов. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2013.
2. **Вуколов, Э. А.** Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы [Текст] / Э. А. Вуколов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова. – М., 1984.
3. **Мостеллер, Ф.** Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями [Текст] / Ф. Мостеллер. – М., 1971.

Надійшла до редколегії 21.06.2015