УДК 519.6

Н.И. Ободан, Н.А. Гук, А.С. Фещенко
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Рассмотрена обратная спектральная задача для нелинейного уравнения типа Кармана. Неизвестным является значение коэффициента взаимовлияния компонент системы, приводящее к наличию заданной точки ветвления. Обратная задача сформулирована в вариационной постановке и сводится к решению конечномерной задачи оптимизации с ограничениями. В качестве ограничений выбраны условия принадлежности решения компактному множеству. Для операторов, характеризующих обобщенное решение прямой задачи, на основании теорем вложения доказана дифференцируемость по Фреше. Приведен итеративный алгоритм решения задачи.

Розглянуто обернену спектральну задачу для нелінійного рівняння типу Кармана. Значення коефіцієнта взаємовпливу компонент системи, що приводить до наявності заданої точки розгалуження, є невідоме. Обернену задачу сформульовано в варіаційній постановці та зводиться до розв'язання скінченновимірної задачі оптимізації з обмеженнями. Як обмеження обрано умови належності розв'язку компактній множині. Для операторів, що характеризують узагальнений розв'язок прямої задачі, доведено диференційованість по Фреше на підставі теорем вкладення. Наведено ітеративний алгоритм розв'язання задачі.

Inverse spectral problem for the nonlinear equation of Karman is considered. The coefficient of interference component of the system, in which a given branch point is realized, is unknown. The inverse problem in the variation formulation is formulated and is reduced to the solution of a finite-dimensional optimization problem with constraints. Condition, that solution belongs to compact set, is selected as constraints. For operators of the generalized solution of the direct problem Freche differentiable are proved on the basis of the embedding theorems. Iterative algorithm for solving the problem is presented.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, уравнение Кармана, обобщенное решение, теорема вложения, компактное множество, метод множителей Лагранжа.

Введение. Метод обратных задач, как способ идентификации и выбора моделей различных наблюдаемых систем, нашел широкое применение [2 – 6]. Использование указанного метода ограничивается условием существования неособого решения соответствующей прямой задачи. Альтернативная постановка – определение оптимальных, с точки зрения выполнения функций цели, решений для задачи на собственные значения также достаточно изучена [4].

Между тем существует класс задач, сформулированных с использованием нелинейных эллиптических операторов, для которого постановка обратной задачи связана с наличием точек ветвления прямой задачи, не описываемых классической задачей на собственные значения. Для обеспечения возможности решения указанных задач требуется непрерывность функционала, характеризующего обращение решения прямой задачи на решение обратной задачи в точке ветвления. Ниже рассмотрим такую обратную задачу: для уравнения типа Кармана определим значение коэффициента взаимовлияния компонент системы, приводящее к наличию заданной точки ветвления, фиксированной по значению правой части в уравнениях прямой задачи.

Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $R^2, x_1, x_2 \in \Omega$ с границей $\Gamma \in C^1_\Gamma$.

На области Ω задана нелинейная краевая задача

$$\begin{aligned} &A_1^{ijkl}\nabla_{ij}\left(\nabla_{kl}\tilde{u}_1\right) - 1^{ik}1^{jl}\,\nabla_{kl}\tilde{u}_2\left(B_{ij} + \nabla_{ij}\tilde{u}_1\right) = \lambda F\left(x_1, x_2\right) \\ &A_2^{ijkl}\nabla_{ij}\left(\nabla_{kl}\tilde{u}_2\right) - 1^{ik}1^{jl}\,\nabla_{kl}\tilde{u}_1\left(B_{ij} + \nabla_{ij}\tilde{u}_1\right) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

при $$\tilde{u}_\Gamma = 0\ ;\ \frac{\partial \tilde{u}_\Gamma}{\partial n} = 0$$

Здесь $\tilde{u} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}^T$; $A^{ijkl} = \left\{A_1^{ijkl}, A_2^{ijkl}\right\}$; $0 \le \lambda \le \lambda_{кр}$; n – нормаль к поверхности, принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Обратной спектральной задачей для нелинейного уравнения Кармана будем называть задачу определения вектор-функций A^{ijkl} и (или) B_{ij} по заданному значению $\lambda_{кр}$, определяющему первую точку ветвления краевой задачи (1). Ограничимся определением вектор-функции $B = \{B_{ij}\}$, характеризующей взаимное влияние компонентов системы $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$. Тогда необходимо найти такое $B = \{B_{ij}\}$, чтобы

$$B = \underset{B \in \overline{B}}{\arg\min}\ J\ , \tag{2}$$

где $J=\left(\lambda_{кр}-\lambda_{\min}(B)\right)^2$; $\lambda_{\min}(B)$ – первая точка ветвления решения уравнения (1) при соответствующем B.

Метод решения. Определим множество

$$\tilde{B}=\left[B_{ij}\in W^1_{2\Omega},\ \underline{B}\le B_{ij}\le\overline{B},\ \underline{B},\overline{B}\ge 0,\ \underline{c}\le\frac{dB}{d\lambda_{\min}}\le\bar{c},\ \operatorname{sign}\underline{c}=\operatorname{sign}\bar{c}\right].(3)$$

Зададим $\tilde{u}=u_0+u$, тогда условие, определяющее точку ветвления, имеет вид

$$A_1^{ijkl}\left(\nabla_{ij}\nabla_{kl}u_1\right)-1^{ik}1^{jl}\left[\nabla_{kl}u_2\left(B_{ij}(X)+\nabla_{ij}u_1^0(\lambda)\right)+\nabla_{kl}u_2^0(\lambda)\nabla_{ij}u_1\right]=0;\quad(4)$$

$$A_2^{ijkl}\left(\nabla_{ij}\nabla_{kl}u_2\right)-1^{ik}1^{jl}\left[\nabla_{kl}u_1\left(B_{ij}(X)+\nabla_{ij}u_1^0(\lambda)\right)\right]=0\quad(5)$$

при $u\{u_1,u_2\}^T\ne 0$, $\lambda=\lambda_{\min}$ в первой точке ветвления.

Соответствующее обобщенное решение

$$\begin{aligned}(u_1,v_1)_{V^1_\Omega}&=\int 1^{ik}1^{jl}\left[\left(B_{ij}v_1-\nabla_i v_1\nabla_j u_1^0(\lambda)\right)\nabla_{kl}u_2-\nabla_{kl}u_2^0(\lambda)\nabla_i v\nabla_j u_1\right]d\Omega;\\(u_2,v_2)_{V^2_\Omega}&=\int 1^{ik}1^{jk}\left[\left(B_{ij}u_1-\nabla_i u_1^0(\lambda)\nabla_j u_1\right)\right]\nabla_{kl}v_2\,d\Omega,\ u\ne 0,\end{aligned}\quad(6)$$

где введены пространства $V_{1\Omega}$, $V_{2\Omega}$ со скалярным произведением и нормой соответственно

$$\begin{aligned}(u_1,v_1)_{V_{1\Omega}}&=\int_\Omega A_1^{ijkl}\nabla_{ij}u_1\nabla_{kl}v_1\,d\Omega;\\ \|u_1\|_{V_{1\Omega}}&=\int_\Omega A_1^{ijkl}\nabla_{ij}u_1\nabla_{kl}u_1\,d\Omega;\\(u_2,v_2)_{V_{2\Omega}}&=\int_\Omega A_2^{ijkl}\nabla_{ij}u_2\nabla_{kl}v_2\,d\Omega;\\ \|u_2\|_{V_{2\Omega}}&=\int_\Omega A_2^{ijkl}\nabla_{ij}u_2\nabla_{kl}u_2\,d\Omega;\\(u,v)_{V_{12\Omega}}&=\left[(u_1,u_2)(v_1,v_2)\right]_{V_{12\Omega}}=(u_1,v_1)_{V_{1\Omega}}+(u_2,v_2)_{V_{2\Omega}}.\end{aligned}\quad(7)$$

Запишем соотношения (6) в виде

$$a_B-b_B(\lambda)=0,\quad(8)$$

где

$$a_{1B}=(u_1,v_1)_{V_{1\Omega}}-\int_\Omega 1^{ik}1^{jl}B_{ij}v_1\nabla_{kl}u_2\,d\Omega;$$

$$a_{2B}=(u_2,v_2)_{V_{2\Omega}}-\int_\Omega 1^{ik}1^{jl}B_{ij}u_1\nabla_{kl}v_2\,d\Omega;$$

$$b_{1B}=\int_\Omega 1^{ik}1^{jl}\left(\nabla_{kl}u_2\nabla_{ij}u_1^0\lambda+\nabla_{kl}u_2^0\lambda\nabla_{ij}u_1\right)d\Omega;$$

$$b_{1B}=\int_\Omega 1^{ik}1^{jl}\left(\nabla_{kl}u_1\nabla_{ij}u_1^0\lambda\right)d\Omega,$$

и рассмотрим свойства функционалов a_{iB}, b_{iB}.

Пусть точка $P_1=\left(\overset{(1)}{B},\overset{(1)}{u},\overset{(1)}{\lambda}_{\min}\right)$ удовлетворяет условию (6). Дадим функции $\overset{(1)}{B}$ приращение ΔB, $\|\Delta B\|\le\varepsilon$ и оценим разности $\overset{(2)}{a}_B\left(\overset{(1)}{B}+\Delta B\right)-\overset{(1)}{a}_B\left(\overset{(1)}{B}\right)$, $\overset{(2)}{b}_B\left(\overset{(1)}{B}+\Delta B\right)-\overset{(1)}{b}_B\left(\overset{(1)}{B}\right)$ для точки $P_2=\left(\overset{(2)}{B},\overset{(2)}{u},\overset{(2)}{\lambda}_{\min}\right)$.

Пусть $\overset{(1)}{V}_{1\Omega}$, $\overset{(1)}{V}_{2\Omega}$, $\overset{(2)}{V}_{1\Omega}$, $\overset{(2)}{V}_{2\Omega}$ – пространства, соответствующие точкам типа P_1 и P_2. Эти пространства эквивалентны [1], поэтому каждую функцию $u_p\in\overset{(1)}{V}_{p\Omega}$, $p=1{,}2$ можно рассматривать как элемент $\overset{(2)}{V}_{p\Omega}$ и наоборот. Тогда из соотношений (7) можно определить

$$\Delta_p\equiv\left(\overset{(2)}{u}_p,v_p\right)_{\overset{(2)}{V}_{p\Omega}}-\left(\overset{(1)}{u}_p,v_p\right)_{\overset{(1)}{V}_{p\Omega}}=\int_\Omega 1^{ik}1^{jl}\,\Delta B\nabla_{ij}u_p\nabla_{kl}v_b\,d\Omega,\ p=1{,}2,$$

откуда, используя теоремы вложения, получаем

$$\Delta_p \le m\|\Delta B\|\|u_p\|_{V_{p\Omega}^{(1)}} \|v_p\|_{V_{p\Omega}^{(1)}}. \tag{9}$$

Введем оператор, определяемый отношением

$$\left(D_p u_p, v_p\right)_{V_{p\Omega}^{(1)}} = \left(u_p, v_p\right)_{V_{p\Omega}^{(2)}}, \; p = 1{,}2, \tag{10}$$

откуда, учитывая условие (9), имеем

$$1 - m\Delta B \le \left\|D_p\right\| \le 1 + m\Delta B, \; p = 1{,}2 \;, \; m = \text{const}. \tag{11}$$

Оценивая все слагаемые в выражениях для a_B, b_B с помощью теорем вложения [1], окончательно получим

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{a}_B - \overset{(1)}{a}_B \le m_1\|\Delta B\|\|u\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} \|v_1\|_{V_{1\Omega}^{(1)}}; \\ &\overset{(2)}{b}_B - \overset{(1)}{b}_B \le m_2\|\Delta B\|\|u\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} \|v_2\|_{V_{1\Omega}^{(1)}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично устанавливаем при $\overset{(2)}{\lambda}_{\min} = \overset{(1)}{\lambda}_{\min} + \Delta\lambda$

$$\overset{(2)}{b}_B\left(\lambda_{\min} + \Delta\lambda\right) - \overset{(1)}{b}_B\left(\lambda_{\min}\right) \le m_3 \Delta\lambda \|u_1\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} \|v_2\|_{V_{1\Omega}^{(1)}}. \tag{13}$$

Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{a}_B - \overset{(1)}{a}_B = n_1\|\Delta B\|_{W_{1\Omega}^1} \|u\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} \|v\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} + w(\Delta B); \\ &\overset{(2)}{b}_B - \overset{(1)}{b}_B = n_2 \Delta B \|u\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} \|v_2\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} + w(\Delta B), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\|w(\Delta B)\| = 0(\|\Delta B\|)$ при $\Delta B \to 0$

$$\overset{(2)}{b}_B\left(\lambda_{\min} + \Delta\lambda\right) - \overset{(1)}{b}_B\left(\lambda_{\min}\right) = m_3 \Delta\lambda \|u_1\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} \|v_2\|_{V_{1\Omega}^{(1)}} + w(\Delta\lambda), \tag{15}$$

где $\|w(\Delta\lambda)\| = 0(\|\Delta\lambda\|)$ при $\Delta\lambda \to 0$

Отсюда следует дифференцируемость по Фреше операторов a_B, b_B по B и $\lambda_{\min}$.

Введем характеристические функции μ_{1i}, μ_{2i}, $i = 1, M$:

$$\mu_{1i} = \begin{cases} 1 \text{ если } & \left(B_i - \underline{B}\right) < 0 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}, \; \mu_{2i} = \begin{cases} 1 \text{ если } & \left(\overline{B} - B_i\right) < 0 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}.$$

С учетом условий (3) функционал для определения квазирешения (2) имеет вид

$$J = \left(\lambda_{кр} - \lambda_{\min}\right)^2 + \sum_{i=1}^{M}\left(\varphi_{1i}\mu_{1i}\left(B_i - \underline{B}\right)^2 + \varphi_{2i}\mu_{2i}\left(\overline{B} - B_i\right)^2\right). \tag{16}$$

Здесь φ_{1i}, φ_{2i}, – множители Лагранжа; $\lambda_{\min}$ – значение параметра λ в точке ветвления $\left(B, u, \lambda_{\min}\right)$ при значении B, определенном из условия

$$B = \underset{B \in \tilde{B}}{\operatorname{argmin}} \; J\left(\lambda_{\min}, B, u_0, \varphi_1, \varphi_2\right), \tag{17}$$

где u_0 – решение в точке ветвления $\lambda_{\min}$.

Для сведения задачи (1), (2), (6) к конечномерной используем дискретизацию методом конечных элементов. Решение задачи (1), (2), (6) опишем векторами $U^0 = \left\{U_{0k}, \; k = \overline{1, M}\right\}$ $U = \left\{U_j, \; j = 1, M\right\}$, $B = \left\{B_i, \; i = 1, M\right\}$, где U_{0k}, U_j, B_i – узловые значения функций $u_0(x)$, $u(x)$, $B(x)$ на соответствующих сетках. Процедура метода конечных элементов сводит задачу (1), (6) к совместному решению двух систем уравнений – нелинейной алгебраической

$$K_1\left(U_0, U, B\right) = \lambda R, \tag{18}$$

где $K_1\left(U_0, U, B\right)$ – нелинейная матрица,
и линейной однородной

$$K_2\left(U_0(\lambda), B\right)U = 0, \tag{19}$$

определяющей точку ветвления как

$$\det K_2\left(U_0(\lambda), B\right) = 0. \tag{20}$$

Решение системы (18) и проверку условия (19) проводим методом продолжения по параметру λ [7] при фиксированном векторе $B^{(n)}$, где $\Delta B_i^{(n)}, \varphi_i^{(n)}$ определим из условия (17) методом Ньютона

$$\Delta\Phi^{(n)} = -H^{-1}G\,, \tag{21}$$

где $G = \left\{ \dfrac{\partial J}{\partial B_i} \right\}\Bigg|_{B=B^{(n-1)}}$, $H = GG^T$, $i = \overline{1, M}$

$$\Delta\Phi^{(n)} = \left\{ \Delta B^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)} \right\}^T, \ \varphi_1 = \{\varphi_{1i}\}, \ \varphi_2 = \{\varphi_{2i}\}\ , \ i = 1, M\ .$$

Для получения решения выполним итеративный процесс продолжения решения по параметру, в качестве которого выступает одна из компонент вектора B или параметр λ :

$$B^{(n)} = B^{(n-1)} + \Delta B^{(n)};$$
$$\lambda_{\min}^{(n)} = \lambda_{\min}^{(n-1)} + \Delta\lambda_{\min}^{(n)};$$
$$U^{(n)} = U^{(n-1)} + \Delta U^{(n)};$$
$$U_0^{(n)} = U_0^{(n-1)} + \Delta U_0^{(n)};$$
$$\lambda^{(s)} = \lambda^{(s-1)} + \Delta\lambda\,,\ s = \overline{1, S}\ .$$

Разрешающие соотношения метода продолжения по параметру для определения приращения решения $\Delta U_0^{(n)}$, вызванного изменением вектора $B^{(n-1)}$ на величину $\Delta B^{(n)}$, имеют вид

$$\begin{gathered} \tilde{K}_1\left(U_0^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda\right)\Big|_{\lambda=\lambda_{\min}} \Delta\overline{U}_0^{(n)} + \overline{K}_1\left(U_0^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda\right)\Big|_{\lambda=\lambda_{\min}} \Delta B^{(n)} = 0; \\ \overline{K}_1 = \{a_{ij}\},\ \ i, j = \overline{1, M}, \end{gathered} \tag{22}$$

где $\overline{K}_1\left(U^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda_{\min}\right)$ – матрица, полученная путем линеаризации матрицы K_1; $\tilde{K}_1$ – матрица, полученная из линеаризованной матрицы $\overline{K}_1\left(U^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda_{\min}\right)$ заменой l-го столбца $a_{il}, i = \overline{1, M}$ столбцом $\dfrac{\partial \overline{K}_1}{\partial B_l}$; $\Delta\overline{U}_0$ – вектор ΔU_0, в котором компонента ΔU_{0l} заменена на ΔB_l. Такая замена обеспечивает смену параметра продолжения, поскольку в точке $(U_0, \lambda_{\min})$ линеаризованная матрица $\overline{K}_1$ вырождена, $\overline{K}_1\left(U_0^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda_{\min}\right) = K_2\left(U_0^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda_{\min}\right)$.

После построения решения в точке $\left(\lambda_{\min}^{(n)}, U_0^{(n)}, B^{(n)}\right)$ решение продолжаем по параметру λ до достижения точки $\lambda_{\min}^{(n)}$, где $\det K_2\left(U_0^{(n-1)},\ B^{(n-1)},\ \lambda_{\min}\right) = 0$. Невязку $\left(\lambda_{\min}^{(n)} - \lambda_{кр}\right)$ используем для определения $\Delta B^{(n)}$. Для построения вектора $\left\{ \dfrac{dJ_{\min}^{(n)}}{dB_i} \right\}$ производную Фреше в точке $\lambda_{\min}^{(n)}$ определим численно.

Алгоритм

1. Задать: B_0, A_i, a_j^i, $i, j = 1{,}2$, b_1, b_2, $\varphi_i^0 = 0$, $\lambda_{нач} = 0$, $\lambda_{кр}$, $\varepsilon = 10^{-2}$.
2. Задать $n = 0$.
3. Определить $\lambda_{\min}^{(n)}$, $U_0^{(n)}$ методом продолжения по параметру λ .
4. Вычислить $\left\{ \dfrac{dJ}{dB_i} \right\}$, $i = 1, M$.
5. Определить $B_i^{(n+1)}$, $\varphi_i^{(n+1)}$, $\left(\lambda_{\min}^{(n+1)} - \lambda_{кр}\right) \ge \varepsilon$, иначе перейти на п. 7.
6. $n = n + 1$, перейти на п. 3.
7. Конец.

Числовой анализ. Исследуется задача определения $B_{22} = \text{const}$ при $B_{11} = B_{12} = 0$ и $A^{ijkl} = \text{const}$, удовлетворяющему условию (3). В качестве области Ω использована цилиндрическая панель с фиксированной опорной хордой, для которой $B_{22} = \dfrac{1}{R}$, где R – безразмерный радиус кривизны панели, длина $-1 \le x_1 \le 1$, на криволинейных кромках панели реализованы условия шарнирного опирания, прямолинейные кромки свободные.

Метод конечных элементов реализован с помощью пакета «COSMOS».

На рис. 1 приведены значения B_{22} для различных значений $\lambda_{кр}$, отнесенных к соответствующим значениям $\lambda_{кр}$ для цилиндрической оболочки. Как видно существуют точки решений, для которых $\frac{d\lambda_{\min}}{dB}=0$, т.е. условия (1) не удовлетворяются. Эти точки разделяют области значений B, являющиеся компактами, для которых $B \in \overline{B}_k$, где $\overline{B}_k$ – компактное множество. На рис. 2 показан вид решений U_0+U, соответствующих $\lambda=\lambda_{\min}$. Видно, что каждому компакту $\overline{B}_k$ соответствуют различные формы решений U_0+U.

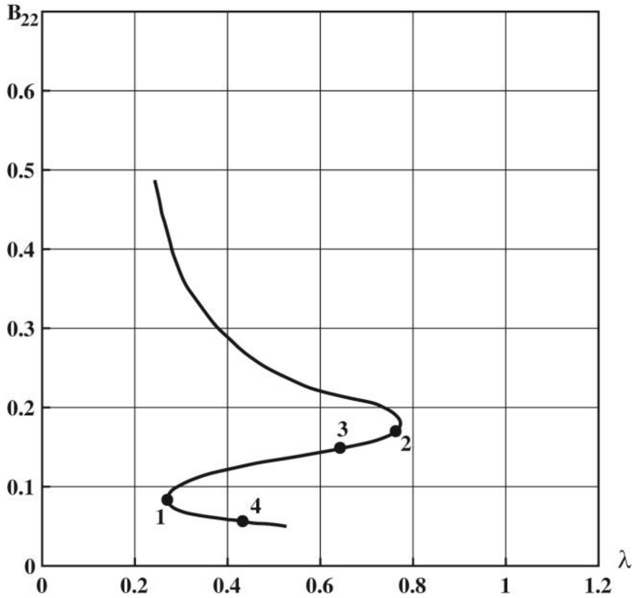

Рис.1. Зависимость значений B_{22} для разных значений $\lambda_{кр}$

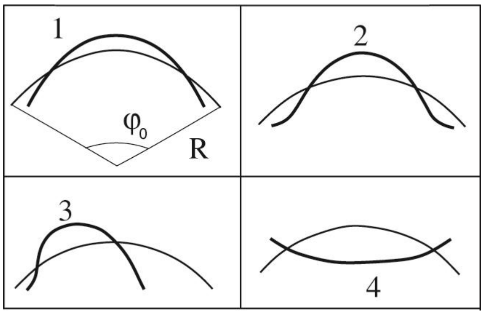

Рис. 2. Формы решений прямой задачи

Таким образом, значения B ограничиваются областью $\underline{c} \le \frac{dB}{d\lambda_{\min}} \le \overline{c}$, где $\underline{c}$, $\overline{c}$ определяем из условия $\operatorname{sign}\underline{c}=\operatorname{sign}\overline{c}$.

Выводы. Обратная спектральная задача для нелинейных уравнений Кармана, где в качестве неизвестной вектор-функции B выступают связи между компонентами системы, имеет решение на компактном множестве, ограниченном условием $\frac{d\lambda_{\min}}{dB}=0$. Решение может быть построено итеративным путем, путем решения конечномерной задачи оптимизации с ограничениями.

Библиографические ссылки

1. **Ворович, И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек [Текст] / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 373 с.

2. **Гасанов, А.И.** Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов [Текст] / А.И. Гасанов // Мат. моделирование. – 1989. – Т. 1, № 6. – С. 1-32.

3. **Латтес, Р.** Метод квазиобращения и его приложения [Текст] / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

4. **Литвинов, В.Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями в механике [Текст] / В.Г. Литвинов. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

5. **Сергиенко, И.В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 2009. – 639 с.

6. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 386 с.

7. **Шалашилин, В.И.** Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация [Текст] / В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2015