УДК 519.6

Н.И. Ободан, Н.А. Гук, А.С. Магас
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

КОРРЕКТНОСТЬ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Исследована корректность нейросетевой аппроксимации решения обратной задачи для нелинейного эллиптического уравнения типа Кармана. Показано, что операторы, описывающие обобщенное решение прямой задачи, являются непрерывными и ограниченными. На основании топологической леммы установлена непрерывность значений функции выхода нейронной сети от функции входа. Показано, что с использованием нейронной сети возможна идентификация свойств нелинейной модели, если свойства описываются на компактном множестве.

Досліджено коректність нейромережної апроксимації розв'язання оберненої задачі для нелінійного еліптичного рівняння типу Кармана. Показано, що оператори, які описують узагальнений розв’язок прямої задачі, є неперервні і обмежені. На підставі топологічної леми встановлено неперервність значень функції виходу нейронної мережі від функції входу. Показано, що з використанням нейронної мережі можлива ідентифікація властивостей нелінійної моделі, якщо властивості описувати на компактній множині.

The correctness of the neural's network approximation for the solution of the inverse problem for a nonlinear elliptic type equation Karman is investigated. Continuity and boundedness of generalized solutions of the direct problem is proved. Continuous dependence of the output values from the neural network input function is set on the basis of the topological lemma. Using a neural network to identify the properties of non-linear model is possible if the properties are described on the compact set.

Ключевые слова: обратная задача, нейронная сеть, аппроксимация, компактное множество.

Введение. Постановка и решение обратных задач является основным инструментом идентификации моделей, в частности, описываемых уравнениями Кармана, по дополнительной информации о решении. Существуют многочисленные методы решения указанной задачи, опирающиеся на вариационную постановку задачи в сочетании с числовыми методами оптимизации [1; 4; 5].

Указанные подходы, как правило, требуют значительных вычислительных мощностей и являются весьма чувствительными к выбору начального приближения и к свойствам модели, так что не могут быть использованы для прикладных задач, решаемых в процессе идентификации моделей действительности в режиме on-line.

Альтернативным подходом можно назвать использование инверсных нейронных сетей, сконструированных так, что входом является дополнительная информация, получаемая для системы в действительности, а выходом – решение обратной задачи.

Теорема Колмогорова [3] об универсальной аппроксимации служит математической основой для применения нейронных сетей. Теорема утверждает, что для заданного $\varepsilon > 0$ и произвольной непрерывной функции f, определенной на n-мерном единичном кубе $[0;1]^n$, может быть найдена функция f^*, представленная в виде суммы m суперпозиций непрерывных и монотонных отображений единичных отрезков:

$$f^*(x_1,..,x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_{ij}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j + b_i\right), \qquad (1)$$

где a_i – коэффициент суммы; φ_{ij} – непрерывные функции одной переменной, определенные на отрезке $[0;1]$; $x_j \in [0;1]$

При этом выполняется условие

$$\left| f(x_1,..,x_n) - f^*(x_1,..,x_n) \right| < \varepsilon \text{ для всех } x_i \in [0;1],\ i = \overline{1,n}$$

Так как основным требованием для применения аппроксимации (1) является непрерывность выхода по входу, необходимо рассмотреть свойства функций прямой и обратной задач.

Математическая модель обратной задачи. Рассмотрим задачу определения коэффициентов нелинейного эллиптического уравнения типа Кармана, прямую задачу для которого сформулируем следующим образом: вектор-функцию $\tilde{u}(X, H(X))$ в ограниченной липшицевой области $\Omega = \left\{X \middle| X = (x_1, x_2) \in R^2\right\}$ с границей Γ опишем уравнениями

$$Q_1 \equiv \nabla_{ij}\left(A_1^{ijkl}(H_1)\nabla_{kl}u_1\right) - 1^{ik}1^{jl}\,\nabla_{kl}u_2\left(B_{ij}(H_1) + \nabla_{ij}u_1\right) = \lambda H_2\,; \qquad (2)$$

$$Q_2 \equiv \nabla_{ij}\left(A_2^{ijkl}(H_1)\nabla_{kl}u_2\right) - 1^{ik}1^{jl}\nabla_{kl}u_1\left(B_{ij}(H_1) + \nabla_{ij}u_1\right) = 0\,; \quad (3)$$

$$Q = \{Q_1, Q_2\}^T,\ H = \{H_1, H_2\}^T,\ u = \{u_1, u_2\}^T,$$

с граничными условиями

$$u_\Gamma = 0\ ;\ \frac{\partial u_\Gamma}{\partial n} = u_n = 0, \quad (4)$$

где $A_2^{ijkl}(H_1) > 0$, $A_2^{ijkl}(H_2) > 0$, $B_{ij}(H_1)$ – известные функционалы известной функции $H_1(X)$; H_2 – правая часть; Γ – кусочно-гладкая граница области Ω; Γ_i – кусочно-гладкие контуры класса C_Γ^1, $\sum_i \Gamma_i = \Gamma$; $\nabla_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $\nabla_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$; $i, j = 1{,}2$, λ – вектор параметров; n – нормаль к поверхности Ω.

Введем множество допустимых решений:

$$\tilde{u}: \left| \begin{array}{l} \tilde{u}(X) \in V_\Omega^{12};\, Q(\tilde{u}) = 0 \\ \tilde{u}\big|_\Gamma = 0,\, \tilde{u}_n\big|_\Gamma = 0 \end{array} \right.;\ \tilde{H}: \left| \begin{array}{l} \underline{H} \le \tilde{H} \le \overline{H};\, H \in W_{2\Omega}^1 \\ a \le \dfrac{\partial H}{\partial u} \le b;\, \dfrac{\partial^2 \tilde{H}(X)}{\partial u^2} \ge 0 \end{array} \right.. \quad (5)$$

Здесь $W_{2\Omega}^1$ – специальное пространство.

Функции, принадлежащие множеству $\tilde{H}$, являются равномерно ограниченными, монотонными, выпуклыми, следовательно, множество $\tilde{H}$ есть компакт. Здесь $\tilde{u}$ – множество решений задачи (2)-(3), $\tilde{H}$ – множество неизвестных функций обратной задачи.

Решение обратной задачи предполагает по известным следам функции u в точках γ_r

$$u(\gamma_r, H) = u^*,\ r = 1, N \quad (6)$$

определение функций $H(X)$. При использовании вариационного подхода задача сводится к задаче минимизации функционала

$$\rho_{V_\Omega^{12}} = \left(u(\gamma_r, H), u^*\right)_{V_\Omega^{12}},\ H \in \tilde{H},\ u^* \in V_\Omega^{12}, \quad (7)$$

характеризующего расстояние в пространстве V_Ω^{12} между значением $u(\gamma_r, H)$, найденным из решения прямой задачи, и заданным значением u^*. Решение обратной задачи имеет вид

$$H = \arg\inf \rho_{V_\Omega^{12}}\left(u(\gamma_r, H), u^*\right),\ H \in \tilde{H},\ u \in \tilde{u}, \quad (8)$$

где $\rho_{V_\Omega^{12}}$ – функционал-невязка, определяемый метрикой в пространстве V_Ω^{12}.

Обоснование использования нейронных сетей. Обобщенное решение для краевой задачи (2), (3) имеет вид

$$(u_1, v_1)_{V_\Omega^1} = \int_\Omega \left[1^{ik}1^{jl}\left(B_{ij}v_1 - \nabla_i v_1 \nabla_j u_1\right)\nabla_{kl}u_2 - H_2 v_1\right] d\Omega\,; \quad (9)$$

$$(u_2, v_2)_{V_\Omega^2} = -\int_\Omega \left[1^{ik}1^{jk}\left(B_{ij}u_1 - \nabla_i u_1 \nabla_j u_1\right)\nabla_{kl}v_2\right] d\Omega$$

где $v = (v_1, v_2)^T$ – произвольная вектор-функция, $v \in V_\Omega^{12}$.

Здесь введены функциональные пространства V_Ω^1, V_Ω^2, V_Ω^{12} со скалярным произведением и нормой соответственно

$$\begin{aligned} &(u_1, v_1)_{V_\Omega^1} = \int_\Omega A_1^{ijkl}(H)\nabla_{ij}u_1\nabla_{kl}v_1 d\Omega; \\ &\|u_1\| = \int_\Omega A_1^{ijkl}(H)\nabla_{ij}u_1\nabla_{kl}u_1 d\Omega; \\ &(u_2, v_2)_{V_\Omega^2} = \int_\Omega A_2^{ijkl}(H)\nabla_{ij}u_2\nabla_{kl}v_2 d\Omega; \\ &\|u_2\| = \int_\Omega A_2^{ijkl}(H)\nabla_{ij}u_2\nabla_{kl}u_2 d\Omega; \\ &(u,v)_{V_\Omega^{12}} = [(u_1, u_2)(v_1, v_2)]_{V_\Omega^{12}} = (u_1, v_1)_{V_\Omega^1} + (u_2, v_2)_{V_\Omega^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы слагаемое $\int\limits_{\Omega}\lambda H_2 v_1 d\Omega$ было ограниченным функционалом, необходимо, чтобы

$$\sup\frac{\int\limits_{\Omega}\lambda H_2 v_1 d\Omega}{\|v_1\|}=\mathrm{const}<\infty$$

для всех $v_1\in V_{\Omega}^{1}$. Тогда по теореме Рисса

$$\int\limits_{\Omega}\lambda H_2 v_1=\left(u_{\Pi},v_1\right)_{V_{\Omega}^{1}},$$

что дает возможность превратить $\overline{V}_{\Omega}^{1}$ в гильбертово пространство. Для двух элементов H_2^1 и H_2^2 из $\overline{V}_{\Omega}^{1}$ имеем

$$\left(\lambda H_2^1\right)\!\left(\lambda H_2^2\right)_{\overline{V}_{\Omega}^{1}}=\left(u_{\Pi 1},u_{\Pi 2}\right)_{V_{\Omega}^{2}}\ \text{и}\ \|\lambda H_2\|=\|u_{\Pi}\|_{V_{\Omega}^{1}}.$$

Определение обобщенного решения корректно, если $u_1\in V_{\Omega}^{1}$, $u_2\in V_{\Omega}^{2}$, т.к. каждый член в правой части (9) определен:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}1^{ik}1^{jl}\left(B_{ij}v_1-\nabla_i v_1\nabla_j u_1\right)\nabla_{kl}u_2 d\Omega\le\left\|1^{ik}1^{jl}B_{ij}\right\|_{C_{\Omega}}\cdot\|v_1\|_{L_{2\Omega}}\cdot\|\nabla_{kl}u_2\|_{L_{2\Omega}}\\&+\left\|1^{ik}1^{jl}\nabla_i v_1\nabla_j u_1\right\|_{L_{2\Omega}}\cdot\|\nabla_{kl}u_2\|_{L_{2\Omega}}\le m\left\|1^{ik}1^{jl}B_{ij}\right\|_{C_{\Omega}}\cdot\|v_1\|_{V_{\Omega}^{1}}\cdot\|u_2\|_{V_{\Omega}^{2}}\qquad(11)\\&+m\|v_1\|_{L_{4\Omega}}\cdot\|u_1\|_{L_{4\Omega}}\cdot\|u_2\|_{V_{\Omega}^{2}}\le m\|v_1\|_{V_{\Omega}^{1}}\cdot\|u_2\|_{V_{\Omega}^{2}}\left(1+\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}}\right).\end{aligned}$$

Указанные неравенства следуют из теорем вложения и свойств пространств V_{Ω}^{1}:

$$\nabla_{ij}u\in L_{2\Omega},\ \left\|\nabla_{ij}u\right\|_{L_{2\Omega}}\le m\|u\|_{V_{\Omega}^{1}};$$

$$\nabla_i u_1\cdot\nabla_j u_1\in L_{q\Omega}(q\ge 1);$$

$$\left\|\nabla_i u_1\right\|_{L_{qd}}\le m\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}};\quad \left\|\nabla_j u_1\right\|_{L_{qd}}\le m\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}}.$$

Аналогично, из свойств пространства V_{Ω}^{2}

$$\int\limits_{\Omega}1^{ik}1^{jl}\left(B_{ij}u_1-\nabla_i u_1\cdot\nabla_j u_1\right)\cdot\nabla_{kl}u_2\cdot d\Omega\le m\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}}\cdot\|u_2\|_{V_{\Omega}^{2}}\left(1+\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}}\right).\qquad(12)$$

В силу теоремы Рисса из (9) можно записать

$$u_1=N_{V_{\Omega}^{1}}\left(u_{\Pi},u\right);\ u_2=M_{V_{\Omega}^{12}}\left(u_{\Pi},u\right).\qquad(13)$$

Отыскание обобщенного решения задачи (2)-(4) сведено к определению неподвижной точки отображения (13) и последующего определения u_2.

Из соотношений, определяющих $M_{V_{\Omega}^{12}i}$ $i\in\overline{1,2}$, $N_{V_{\Omega}^{1}j}$, $j\in\overline{1,3}$, получаем оценки

$$\|M\|_{V_{\Omega}^{12}}\le m\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}}^{i};$$

$$\|N\|_{V_{\Omega}^{1}}\le m\|u_1\|_{V_{\Omega}^{1}}^{j}.$$

Покажем, что операторы $M_{V_{\Omega}^{12}i}$ действуют усиленно непрерывно из V_{Ω}^{1} в V_{Ω}^{2}.

Если имеется последовательность $u_{1n}\to u_1$ в V_{Ω}^{1}, то

$$\begin{aligned}&\left(\left[M_{V_{\Omega}^{12}}(u_1)-M_{V_{\Omega}^{12}}(u_{1n})\right],v\right)=\\&=\int\limits_{\Omega}1^{ik}1^{jl}B_{ij}\left(u_1-u_{1n}\right)\nabla_{kl}v d\Omega+\\&+\int\limits_{\Omega}1^{ik}1^{jl}\nabla_i u_1\nabla_{kl}v\left(\nabla_i u_1-\nabla_j u_1\right)d\Omega\le\\&\left|\int\limits_{\Omega}1^{ik}1^{jk}B_{ij}\left(u_1-u_{1n}\right)\nabla_{kl}v d\Omega\right|+\qquad(14)\\&+\left|\int\limits_{\Omega}1^{ik}1^{jk}\nabla_i u_1\nabla_{kl}v\left(\nabla_i u_1-\nabla_j u_1\right)d\Omega\right|\le\end{aligned}$$

$$m\left(\left\|1^{ik}1^{jk}\right\| \cdot 1_{kl} \cdot \left\|u_1 - u_{1n}\right\|_{L_{2\Omega}} + \right.$$
$$\left. + \left\|1^{ik}1^{jk}\right\|_{C_\Omega} \left\|\nabla_j u_1\right\|_{L_{4\Omega}} \left\|\nabla_i u_1 - \nabla_j u_1\right\|_{L_{4\Omega}} \left\|v\right\|_{V_\Omega^2}\right).$$

С учетом усиленной непрерывности оператора вложения из $u_{1n} \to u_1$ в V_Ω^1

$$\left\|M_{V_\Omega^{12}1}(u_1) - M_{V_\Omega^{12}1}(u_{1n})\right\|_{V_\Omega^2} \to 0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\left\|N_{V_\Omega^1 j}(u_1) - N_{V_\Omega^1 j}(u_{1n})\right\|_{V_\Omega^1} \to 0. \quad (15)$$

Таким образом, операторы M, N усиленно непрерывны по u при фиксированных A_1^{ijkl}, A_2^{ijkl}, B_{ij}, H_2.

Теперь установим дифференцируемость по Фреше операторов M и N по H.

Пусть $H_0(x)$ – некоторая известная функция. Зададим $H(x) = H_0 + \Delta H$, $\|\Delta H\| \le \varepsilon$, ε – малое число, и определим два решения $\overset{(1)}{u}(H_0)$ и $\overset{(2)}{u}(H_0 + \Delta H) = \overset{(1)}{u}(H_0) + \Delta u$ соответственно.

Представим

$$\overset{(2)}{A}{}_p^{ijkl} = \overset{(1)}{A}{}_p^{ijkl} + \left.\frac{\partial A_p^{ijkl}}{\partial H}\right|_{H=H_0} \Delta H = \overset{(1)}{A}{}_p^{ijkl} + \Delta A^{ijkl} \Delta H;$$

$$\overset{(2)}{B}_{ij} = \overset{(1)}{B}_{ij} + \left.\frac{\partial B_{ij}}{\partial H}\right|_{H=H_0} \Delta H = \overset{(1)}{B}_{ij} + \Delta B_{ij} \Delta H. \quad (16)$$

Пусть далее $\overset{(1)}{V}{}_\Omega^1$, $\overset{(1)}{V}{}_\Omega^2$ – пространства, построенные для точек типа (u_0, H_0), а $\overset{(2)}{V}{}_\Omega^1$, $\overset{(2)}{V}{}_\Omega^2$ – для точек типа $(u_0 + \Delta u, H_0 + \Delta H)$. Покажем, что эти пространства эквивалентны, поэтому каждую функцию $u_p \in \overset{(1)}{V}{}_\Omega^p$ рассмотрим как элемент $\overset{(2)}{V}{}_\Omega^p$ и наоборот. Тогда из соотношения (10) можно определить

$$\left(\overset{(2)}{u}_p, v_p\right)_{\overset{(2)}{V}{}_\Omega^p} = \left(\overset{(1)}{u}_p, v_p\right)_{\overset{(1)}{V}{}_\Omega^p} + \int_\Omega \left(\Delta A_p^{ijkl} \Delta H \nabla_{ij} u_p \nabla_{kl} v_p\right) d\Omega$$

и

$$\left(\overset{(2)}{u}_p, v_p\right)_{\overset{(2)}{V}{}_\Omega^p} - \left(\overset{(1)}{u}_p, v_p\right)_{\overset{(1)}{V}{}_\Omega^p} \le m\|\Delta H\| \cdot \|u_p\|_{V_\Omega^p} \cdot \|v_p\|_{V_\Omega^p}, \; p = 1,2. \quad (17)$$

Введем операторы D_p [2], определяемые соотношениями

$$\left(D_p u_p, v_p\right)_{\overset{(1)}{V}{}_\Omega^p} = \left(u_p, v_p\right)_{\overset{(2)}{V}{}_\Omega^p}, \quad p = 1,2. \quad (18)$$

Учитывая условие (17), получим

$$1 - m\|\Delta H\| \le D_p \le 1 + m\|\Delta H\|, \; p = 1,2. \quad (19)$$

Оценивая все слагаемые в обобщенном решении с помощью теоремы вложения, получим

$$\left\|\overset{(1)}{M} - \overset{(2)}{M}\right\|_{\overset{(1)}{V}{}_\Omega^2} \le m\|\Delta H\| \left(1 + \|\varDelta u_1\|_{V_\Omega^1} + \|\varDelta u_1\|_{V_\Omega^1}^2\right);$$

$$\left\|\overset{(1)}{N} - \overset{(2)}{N}\right\|_{\overset{(1)}{V}{}_\Omega^1} \le m\|\Delta H\| \left(1 + \|\varDelta u_1\|_{V_\Omega^1} + \|\varDelta u_1\|_{V_\Omega^1}^2 + \|\varDelta u_1\|_{V_\Omega^1}^3\right). \quad (20)$$

Таким образом, главная часть приращения операторов M, N линейно зависима от $\|\Delta H\|$ и конечна.

На основании топологической леммы [6] устанавливаем непрерывность вектор-функции $H(X)$ по $u(X)$. Это следует из того, что метрическое пространство $\tilde{H}$ отображается на метрическое пространство V_Ω^{12} с помощью непрерывных операторов M, N и существует u^* – образ множества H^*, $\tilde{H}^* \subset \tilde{H}$ при этом отображении. Тогда, если отображение $\widetilde{H} \to V_{\Omega}^{12}$ непрерывно (20) и множество $\widetilde{H}$ обладает свойствами (5), обратное отображение $u^* \to H^*$ также непрерывно на метрике $\widetilde{H}$.

Таким образом, для построения отображения u^* на $\widetilde{H}^*$ можно прибегнуть к нейронной сети, т.к. выполняется условие использования теоремы Колмогорова.

Метод решения обратной задачи. Соотношения (1) дают возможность использовать нейронную сеть, архитектуру которой определяют свойства функций H_i. В качестве входа и выхода нейронной сети используются векторы значений аппроксимируемых функций $u^*(x)$ и $H(x)$.

Дискретизацию функций $u(x)$, $u^*(x)$ и $H(x)$ производят на основе метода конечных элементов, для чего следует ввести 3 сетки дискретизации соответственно:

– X_s, где $X_s = \{x_1^s, x_2^s\}$ – для определения вектора $u = \{u_s\}$, $s = \overline{1,S}$;

– X_j, где $X_j = \{x_1^j, x_2^j\}$, $j = \overline{1,M}$ – для определения вектора $H = \{H_j\}$, $j = \overline{1,M}$;

– X_r, $r = \overline{1,N}$ – для определения вектора $u^*(X_r)$.

Здесь u_s, H_s – узловые значения функций $u(x)$, $H(x)$.

В качестве обучающей выборки используют точки (u_n^*, H_n^*), $n = \overline{1,K}$,, которые представляют собой решения прямых задач на множестве допустимых значений $\widetilde{H}$, дискретизированных методом конечных элементов на сетке H_j, $j = \overline{1,M}$ с интервалом $\Delta H, \|\Delta H\| \le \varepsilon$, ε – малое число. Число элементов выборки K определяют величиной интервала $\overline{H} - \underline{H}$ и значением $\|\Delta H\|$. Как показано выше в (20), при $\|\Delta H\| \le \varepsilon$, если существует точка (u_n, H_n), где u_n – решение (3), то на интервале $H_n \le H \le H_n + \Delta H$ существует решение $u_n + \Delta u$, где $\|\Delta u\| \le \delta(\|\Delta H\|)$, $\delta(\|\Delta H\|) \to 0$, если $\|\Delta H\| \to 0$.

Решения прямых задач (u_n, H_n), $n = \overline{1,K}$ строят на основе нелинейного конечного элемента, реализованного в пакете «COSMOS» методом продолжения по параметру правой части $0 \le \lambda \le \lambda^*$, где λ^* – заданное значение.

Числовая реализация. Построена нейронная сеть в виде многослойного персептрона для случая идентификации правой части нагрузки на замкнутую цилиндрическую оболочку. Область Ω – замкнутая цилиндрическая оболочка с параметрами $L/R = 4$, $R/h = 100$, $E = 2 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0{,}3$, где L, R, h – длина, радиус, толщина оболочки; E, μ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Закон изменения функции нагрузки (правой части) с моделирован зависимостью вида $\lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0, & 0 \le |\varphi| \le \varphi_0/2, \\ 0, & |\varphi| > \varphi_0 \end{cases}$, где λ_0 – параметр нагрузки; φ_0 – угол, характеризующий область нагружения оболочки.

Результаты решения прямых задачи, полученные при фиксированных значениях параметров λ_0, φ_0 из диапазонов $0{,}4 \le \lambda_0 \le 1{,}35$, $\pi/18 \le \varphi_0 \le \pi$, нормировались, образуя вектора входных сигналов нейронной сети. Для обучения нейронной сети число элементов обучающей выборки составило $K = 80$, для проверки обобщающей способности нейронной сети использовано $n = 16$ элементов тестирующей выборки. При этом $H_i^* = \{\lambda_0^{(i)}, \varphi_0^{(i)}\}$.

На рис. 1 приведены значения λ_0, полученные из нейронной сети для элемента тестирующей выборки. Сплошные квадраты – исходные значения λ_0; кресты – полученное значение λ_0 из нейронной сети;

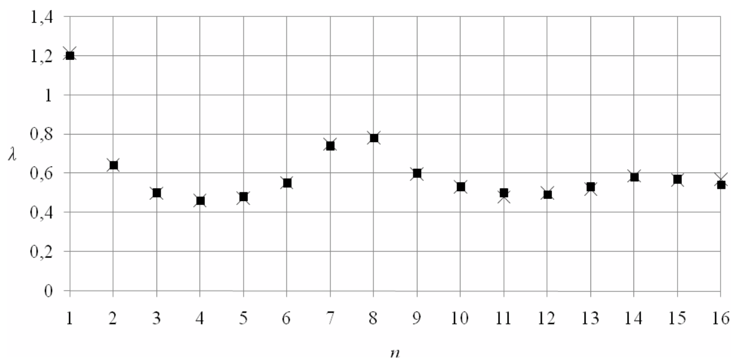

Рис. 1. Идентификация параметра λ_0 с помощью нейронной сети

На рис. 2 приведены значения φ_0, полученные из нейронной сети для элемента тестирующей выборки. Сплошные квадраты – исходные значения φ_0; кресты – полученное значение φ_0 из нейронной сети;

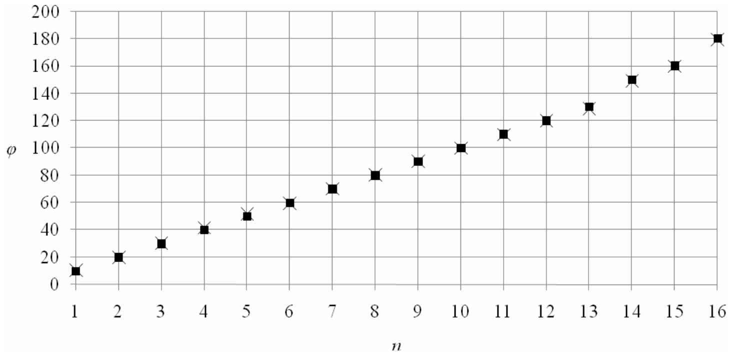

Рис. 2. Идентификация параметра φ_0 с помощью нейронной сети

Среднеквадратическая погрешность аппроксимации на тестирующей выборке составила $\approx 1\%$.

Выводы. Нейросетевая аппроксимация решений обратных задач является корректной, позволяющей идентифицировать свойства нелинейной модели типа уравнений Кармана в случае, если они описываются компактом. Среднеквадратическая погрешность аппроксимации на тестирующей выборке составляет $\approx 1\%$.

Библиографические ссылки

1. **Алифанов, О.М.** Экстремальные методы решения некорректных задач [Текст] / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
2. **Ворович, И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек [Текст] / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 373 с.
3. **Горбань, А.Н.** Обучение нейронных сетей [Текст] / А.Н. Горбань. – М.: СССР-США СП «Параграф», 1990. – 160 с.
4. **Самарский, А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. **Сергиенко, И.В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 2009. – 639 с.
6. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 386 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2015