УДК 517.9, 519.816

Н. И. Недашковская
Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ», г. Киев

МОДЕЛИ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ НА ОСНОВАНИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ЭКСПЕРТОВ

Исследованы модели вычисления приоритетов или относительных важностей (весов) объектов на основании интервальных оценок парных сравнений этих объектов, выполненных экспертом. Проанализированы результаты работы моделей на экспертных оценках разного уровня несогласованности. Рассмотренные модели применяются в методах и технологиях поддержки принятия решений и многокритериального оценивания альтернатив решений по качественным критериям.

Досліджено моделі обчислення пріоритетів чи відносних важливостей (ваг) об’єктів на основі інтервальних оцінок парних порівнянь цих об’єктів, виконаних експертом. Проаналізовано результати роботи моделей на експертних оцінках різного рівня неузгодженості. Розглянуті моделі застосовують у методах і технологіях підтримки прийняття рішень та багатокритеріального оцінювання альтернатив рішень за якісними критеріями.

The paper deals with investigation of models for calculation of priorities or coefficients of relative importance (weights) of objects on basis of interval pairwise comparison judgments of these objects made by an expert. Results of the models are analyzed when using expert judgments of different consistency levels. The investigated models are used in decision support methods and technologies and multiple criteria evaluation of decision alternatives on basis of qualitative criteria.

Ключевые слова: поддержка принятия решений, экспертные оценки парных сравнений, коэффициенты относительных важностей альтернатив решений, интервальные экспертные оценки, согласованность.

Введение. Работа посвящена исследованию моделей вычисления приоритетов (весов) альтернатив решений на основании оценок парных сравнений этих альтернатив, выполненных экспертом в шкале. Известны несколько семейств моделей парных сравнений, которые применяют в таких методах и технологиях поддержки принятия решений и многокритериального оценивания, как метод анализа иерархий и его модификации [1 – 3], методы PROMETHEE [4], технологии целевого оценивания альтернатив [5] и др. Вычисление весов $w \in R_+^n$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, альтернатив решений на основании экспертных оценок парных сравнений выполняется с использованием матрицы парных сравнений (МПС) $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ со свойствами $d_{ij} > 0$ и $d_{ji} = 1/d_{ij}$ (мультипликативная МПС). Основная идея состоит в минимизации нормы отклонения МПС от некоторой неизвестной МПС $C = (w_i / w_j)$, считающейся в методах парных сравнений наилучшей аппроксимацией заданной МПС. МПС $C = (w_i / w_j)$ называют согласованной или теоретической.

Исторически работа первых моделей парных сравнений основывалась на четких МПС, элементы которых $d_{ij} \in R$. Среди них традиционным является метод главного собственного вектора парных сравнений [1; 2]. В зависимости от выбора функции нормы матрицы различают модели наименьших квадратов, взвешенных наименьших квадратов, логарифмических наименьших квадратов и т.д. (см. обзор, выполненный в [3]).

Другие семейства моделей парных сравнений вычисляют веса на основании интервальных и нечетких оценок эксперта. Считается, что предоставление оценок в нечетком виде уменьшает нагрузку на эксперта, так как вместо точечных оценок эксперт дает более удобные для него и одновременно более соответствующие реальности лингвистические оценки вида «приблизительно равно *x*», «между величиной *x* и *y*». В частности, разработано достаточно много моделей для вычисления весов элементов принятия решений на основании интервальных МПС (ИМПС) $I = \{([l_{ij}, u_{ij}]) \mid 0 < l_{ij} \le u_{ij}, i, j = 1,\ldots,n\}$. К этим моделям прибегают также и в задачах оценивания альтернатив решений, в которых экспертные оценки формализуются с применением теории нечетких множеств, а в последующем – принципа декомпозиции и переходом к множествам уровня.

Среди наиболее широко распространенных моделей на основании ИМПС можно выделить модели FPP [6] и 2SLGP [7], которые приводят к четким результирующим весам, а также модели GPM [8], LUAM [9] и TLGP [10], результатами которых являются веса альтернатив решений в виде интервалов.

В данной статье исследованы модели GPM, LUAM и TLGP, результатом работы которых являются интервальные веса альтернатив решений. Интервальные результирующие веса, на наш взгляд, более предпочтительны по сравнению с четкими, поскольку сохраняют бóльшую часть информации из исходной

ИМПС. Разные методы и модели в общем случае приводят к разным результирующим весам. Поэтому возникает задача анализа и сравнения моделей с целью определения наиболее достоверного вектора весов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим положительную обратно симметричную интервальную матрицу парных сравнений (ИМПС):

$$A = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} = [l_{ij}; u_{ij}],\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n\}, \qquad (1)$$

где $u_{ij} \geq m_{ij} \geq l_{ij} > 0$, $l_{ij} = \dfrac{1}{u_{ji}}$, $u_{ij} = \dfrac{1}{l_{ji}}$ и $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$.

Задача состоит в нахождении вектора интервальных весов $w = \{(w_i) \mid w_i = [w_i^l, w_i^u],\ i = \overline{1,n}\}$, который отображает предпочтения, записанные в ИМПС A (1).

Определение 1. ИМПС называется **согласованной**, если следующая допустимая область непустая:

$$W = \left\{ w = (w_1,\ldots,w_n) \,\middle|\, l_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq u_{ij},\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ w_i > 0 \right\}.$$

Утверждение. ИМПС является согласованной тогда и только тогда, когда ее элементы удовлетворяют ограничению

$$\max_k (l_{ik} l_{kj}) \leq \min_k (u_{ik} u_{kj}) \text{ для } \forall \ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим наиболее широко используемые методы и модели вычисления вектора весов на основании ИМПС (1).

2. Методы и модели вычисления весов на основании ИМПС

2.1. Модель целевого линейного программирования GPM (LGPPM)

ИМПС A (1) можно представить двумя вещественными положительными матрицами A^L и A^U, где $A^L \leq A \leq A^U$:

$$A_L = \{(l_{ij})\},\ A_U = \{(u_{ij})\}.$$

Известно, что для заданной экспертом ИМПС A (1) существует нормированный вектор $W = (w_i)$, $w_i = [w_i^L, w_i^U]$, близкий к A в смысле $a_{ij} = \dfrac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} \varepsilon_{ij}$ для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, где ε_{ij} – некоторое возмущение.

Рассмотрим согласованную ИМПС $\tilde{A} = \{(\tilde{a}_{ij})\}$:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U}, \frac{w_i^U}{w_j^L} \right] \qquad (2)$$

и представим ее с помощью двух четких неотрицательных матриц $\tilde{A}^L$ и $\tilde{A}^U$:

$$\tilde{A}^L = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U} \right],\ \tilde{A}^U = \left[\frac{w_i^U}{w_j^L} \right].$$

Запишем в матричном виде

$$\tilde{A}_L W_U = W_U + (n-1) W_L,$$

$$\tilde{A}_U W_L = W_L + (n-1) W_U, \qquad (3)$$

где $W_L = \{(w_i^L) \mid i = 1,\ldots,n\}$, $W_U = \{(w_i^U) \mid i = 1,\ldots,n\}$ – четкие векторы весов.

ИМПС A (1) в общем случае несогласованна, поэтому равенства (3) для A выполняются только приближенно. Введем векторы отклонений:

$$\mathrm{E} = (A_L - I) W_U - (n-1) W_L,$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U \,, \qquad (4)$$

где $\mathrm{E} = \{(\varepsilon_i) \mid i = 1,\ldots,n\}$, $\Gamma = \{(\gamma_i) \mid i = 1,\ldots,n\}$, I – единичная матрица размерности n. Величины ε_i, γ_i при $i = \overline{1,n}$ являются показателями отклонений. Желательно, чтобы абсолютные значения этих показателей были как можно меньшими (предельный случай $\varepsilon_i = \gamma_i = 0$ соответствует согласованности ИМПС A). Поэтому для нахождения вектора весов $W = (w_i)$, $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ строится следующая модель целевого программирования [8].

Модель 1

Минимизировать $J = \sum_{i=1}^{n}(|\varepsilon_i| + |\gamma_i|)$ (5)

при ограничениях:

$\mathrm{E} = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L$,

$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U$,

$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_j^U + w_i^L \geq 1$, $i = \overline{1,n}$,

$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_j^L + w_i^U \leq 1$, $i = \overline{1,n}$,

$W_U - W_L \geq 0$,

$W_L \geq 0$.

В модели 1 первые два ограничения записаны в соответствии с условием (4), следующие два задают необходимое и достаточное условия нормировки для интервального вектора весов [8]. Последние два – это условия на нижний и верхний концы интервального веса и их неотрицательность.

Так как векторы отклонений E и Γ могут принимать отрицательные значения, выполним замену переменных:

$$\varepsilon_i^+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}, \; \varepsilon_i^- = \frac{-\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}, \; \gamma_i^+ = \frac{\gamma_i + |\gamma_i|}{2} \text{ и } \gamma_i^- = \frac{-\gamma_i + |\gamma_i|}{2}, \; i = \overline{1,n},$$

$$\varepsilon_i^+ \geq 0, \; \varepsilon_i^- \geq 0, \; \gamma_i^+ \geq 0 \text{ и } \gamma_i^- \geq 0, \; i = \overline{1,n}.$$

Перепишем модель 1 (5) с учетом замены переменных и получим модель 2 линейного программирования [8].

Модель 2

Минимизировать $J = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- + \gamma_i^+ + \gamma_i^-) = e^T(\mathrm{E}^+ + \mathrm{E}^- + \Gamma^+ + \Gamma^-)$ (6)

при ограничениях:

$\mathrm{E}^+ + \mathrm{E}^- = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L$,

$\Gamma^+ + \Gamma^- = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U$,

$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_j^U + w_i^L \geq 1$, $i = \overline{1,n}$,

$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_j^L + w_i^U \leq 1$, $i = \overline{1,n}$,

$W_U - W_L \geq 0$,

$W_L, \mathrm{E}^+, \mathrm{E}^-, \Gamma^+, \Gamma^- \geq 0$.

Для согласованных ИМПС значения целевых функционалов J моделей 1 и 2 равны нулю. Если $J^* \neq 0$, то ИМПС несогласованна. Величина отклонения J^* от нуля служит оценкой несогласованности экспертных оценок.

2.2. Модель нижней и верхней аппроксимаций (LUAM)

Так же как и для предыдущей модели, предположим, что для заданной экспертом ИМПС A (1) существует нормированный вектор $W=(w_i)$, $w_i=[w_i^L,w_i^U]$, близкий к A в смысле $a_{ij}=\dfrac{[w_i^L,w_i^U]}{[w_j^L,w_j^U]}\varepsilon_{ij}$ для всех $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, где ε_{ij} – некоторое возмущение.

Построим две аппроксимации ИМПС A (1) – нижнюю c_{ij} и верхнюю d_{ij}:

$$c_{ij}\subseteq a_{ij}\text{ (нижняя аппроксимация)},\tag{7}$$

$$a_{ij}\subseteq d_{ij}\text{ (верхняя аппроксимация)},$$

где c_{ij} и d_{ij} – оценки нижнего и верхнего (левого и правого) концов интервальных оценок для отношений весов.

Обозначим $w1_i=[w1_i^L,w1_i^U]$ – нижние интервальные веса; $w2_i=[w2_i^L,w2_i^U]$ – верхние интервальные веса.

Используя интервальную арифметику, распишем условия (7):

$$(c_{ij}\subseteq a_{ij})\Leftrightarrow\left(\frac{w1_i^L}{w1_j^U}\ge l_{ij}\right)\wedge\left(\frac{w1_i^U}{w1_j^L}\le u_{ij}\right),$$

$$(8)$$

$$(d_{ij}\supseteq a_{ij})\Leftrightarrow\left(\frac{w2_i^L}{w2_j^U}\le l_{ij}\right)\wedge\left(\frac{w2_i^U}{w2_j^L}\ge u_{ij}\right).$$

При построении нижней и верхней моделей будем искать наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю границы концов интервальных весов соответственно. Оптимизационная задача для максимизации суммы длин интервальных чисел c_{ij} при первом ограничении в (8) формулируется как нижняя модель [9]. Оптимизационная задача для минимизации суммы длин интервальных чисел d_{ij} при втором ограничении в (8) формулируется как верхняя модель [9].

Нижняя модель

$$J1=\sum_{i=1}^{n}(w1_i^U-w1_i^L)\to\max\tag{9}$$

при ограничениях:

$$w1_i^L\ge l_{ij}w1_j^U,\ \forall i,j,i\ne j,$$

$$w1_i^U\le u_{ij}w1_j^L,\ \forall i,j,i\ne j,$$

$$\sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}w1_j^U+w1_i^L\ge 1,\ i=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}w1_j^L+w1_i^U\le 1,\ i=\overline{1,n},$$

$$w1_i^U-w1_i^L\ge 0,\ i=\overline{1,n},$$

$$w1_i^L>0,\ i=\overline{1,n}.$$

Верхняя модель

$$J2=\sum_{i=1}^{n}(w2_i^U-w2_i^L)\to\min\tag{10}$$

при ограничениях:

$$w2_i^L\le l_{ij}w2_j^U,\ \forall i,j,i\ne j,$$

$$w2_i^U\ge u_{ij}w2_j^L,\ \forall i,j,i\ne j,$$

$$\sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}w2_j^U+w2_i^L\ge 1,\ i=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}w2_j^L+w2_i^U\le 1,\ i=\overline{1,n},$$

$$w2_i^U-w2_i^L\ge 0,\ i=\overline{1,n},$$

$$w2_i^L>0,\ i=\overline{1,n}.$$

Основная цель нижней модели – найти такие веса альтернатив, чтобы соответствующая теоретическая (согласованная) ИМПС ограничивала заданную ИМПС (1) снизу. При этом наиболее желательны те веса, которые имеют наибольшую возможную неточность, выражаемую шириной интервального числа. Поэтому нижняя модель формулируется как задача максимизации. Первые два ограничения нижней модели обеспечивают приближение соответствующей теоретической (согласованной) ИМПС к заданной ИМПС (1) снизу. Следующие два ограничения – необходимые и достаточные условия нормировки интервального вектора весов. Последние два условия обеспечивают корректность интервального числа и его положительность. Среди особенностей нижней модели можно отметить отсутствие ее решения при некотором уровне несогласованности экспертных оценок [9].

Верхняя модель предназначена для нахождения таких весов альтернатив, чтобы соответствующая теоретическая ИМПС ограничивала заданную ИМПС (1) сверху. Наиболее желательны веса, которые имеют наименьшую возможную степень неточности, поэтому верхняя модель формулируется как задача минимизации. Ограничения верхней модели аналогичны соответствующим ограничениям нижней модели. Можно доказать, что оптимальное решение верхней модели всегда существует.

2.3. Двухэтапная модель целевого программирования TLGP

Экспертные оценки парных сравнений альтернатив, заданные в виде интервалов, можно интерпретировать как ограничения на отношения весов альтернатив:

$$l_{ij} \le \frac{w_i}{w_j} \le u_{ij} \text{ при } i,\ j = 1,\ldots,n$$

или после логарифмирования

$$\ln l_{ij} \le \ln w_i - \ln w_j \le \ln u_{ij} \text{ при } i,\ j = 1,\ldots,n.$$

Эти неравенства справедливы для согласованных оценок. В общем случае, как для согласованных, так и для несогласованных оценок, выполняются ограничения:

$$\ln l_{ij} - p_{ij} \le \ln w_i - \ln w_j \le \ln u_{ij} + q_{ij} \text{ при } i,\ j = 1,\ldots,n,$$

где $p_{ij} \ge 0$, $q_{ij} \ge 0$ — такие величины отклонений, что для каждой пары (p_{ij}, q_{ij}) оба числа не могут одновременно быть положительными: $p_{ij}q_{ij} = 0$.

Величины отклонений p_{ij}, q_{ij} для качественного решения должны быть как можно меньшими. Поэтому строится следующая задача целевого программирования, целевая функция которой минимизирует несогласованность ИМПС (1) [10]:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij} + q_{ij}\right) \to \min$$

при ограничениях:

$$\ln w_i - \ln w_j + p_{ij} \ge \ln l_{ij} \text{ при } i,\ j = 1,\ldots,n,$$
$$\ln w_i - \ln w_j - q_{ij} \le \ln u_{ij} \text{ при } i,\ j = 1,\ldots,n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\ln w_i = 0,$$
$$p_{ij}, q_{ij} \ge 0,\ p_{ij}q_{ij} = 0 \text{ при } i,\ j = 1,\ldots,n.$$

Введем переменные x_i и y_i, которые всегда будут неотрицательны:

$$x_i = \frac{\ln w_i + \left|\ln w_i\right|}{2},\ y_i = \frac{-\ln w_i + \left|\ln w_i\right|}{2}.$$

Тогда задачу можно упростить и записать в одном из двух эквивалентных вариантов: с учетом только элементов верхней или только элементов нижней треугольной частей исходной ИМПС. Запишем задачу для элементов одной верхней треугольной части матрицы. Эта задача представляет первый этап модели.

Этап 1:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(p_{ij} + q_{ij}\right) \to \min$$

при ограничениях:

$$x_i - y_i - x_j + y_j + p_{ij} \ge \ln l_{ij} \text{ при } i = 1,\ldots,n-1,\ j = i+1,\ldots,n,$$
$$x_i - y_i - x_j + y_j - q_{ij} \le \ln u_{ij} \text{ при } i = 1,\ldots,n-1,\ j = i+1,\ldots,n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right) = 0,$$
$$x_i, y_i \ge 0,\ x_i y_i = 0 \text{ при } i = 1,\ldots,n,$$
$$p_{ij}, q_{ij} \ge 0,\ p_{ij}q_{ij} = 0 \text{ при } i = 1,\ldots,n-1,\ j = i+1,\ldots,n.$$

Можно показать, что ИМПС A (1) согласованна тогда и только тогда, когда $J^* = 0$, где J^* — оптимальное значение целевой функции задачи этапа 1. Решение задачи первого этапа в общем случае не единственно. Для вычисления допустимых интервалов для весов w_i $(i = 1,\dots,n)$ строится и решается пара задач целевого программирования (этап 2), которые в качестве ограничения используют оптимальное значение J^* целевой функции, полученное на первом этапе [10].

Этап 2:

$$\ln w_i = x_i - y_i \to \min/\max$$

при ограничениях:

$$x_i - y_i - x_j + y_j + p_{ij} \ge \ln l_{ij} \text{ при } i = 1,\dots,n-1,\ j = i+1,\dots,n,$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j - q_{ij} \le \ln u_{ij} \text{ при } i = 1,\dots,n-1,\ j = i+1,\dots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (p_{ij} + q_{ij}) = J^*,$$

$$x_i, y_i \ge 0,\ x_i y_i = 0 \text{ при } i = 1,\dots,n,$$

$$p_{ij}, q_{ij} \ge 0,\ p_{ij} q_{ij} = 0 \text{ при } i = 1,\dots,n-1,\ j = i+1,\dots,n.$$

В результате решения задачи минимизации этапа 2 получим значение $\ln w_i^L$ логарифма левого конца интервального веса w_i, а задачи максимизации — $\ln w_i^U$ логарифма правого конца интервального веса w_i. Отметим, что пара задач этапа 2 решается отдельно для каждого значения индекса $i = 1,\dots,n$. Оптимальные значения этих задач формируют интервалы $\ln w_i = [\ln w_i^L; \ln w_i^U]$. Тогда интервальные веса $w_i = [w_i^L; w_i^U]$ можно определить, применяя обратное преобразование:

$$w_i^L = \exp(\ln w_i^L),\ w_i^U = \exp(\ln w_i^U).$$

Перейдем к анализу рассмотренных моделей с целью определения наиболее достоверного вектора весов.

3. Анализ моделей GPM, LUAM и TLGP

На основании описаний моделей, приведенных в п.2, можно сделать следующие выводы.

- Все три рассмотренные модели разработаны для ИМПС, построенных по экспертным оценкам в мультипликативных шкалах. Они могут применяться как для согласованных, так и несогласованных ИМПС и в результате дают интервальные веса.

- Модель GPM состоит в минимизации абсолютных значений отклонений заданной экспертом ИМПС от теоретической ИМПС. Модель TLGP вычисляет вектор весов в два этапа. На первом минимизируется сумма неотрицательных ошибок в трансформированном пространстве логарифмов, результатом является множество решений. На втором этапе для каждой альтернативы в отдельности решаются две задачи линейного программирования для выбора из этого множества минимального и максимального значений веса, которые формируют соответственно левый и правый концы интервала для этого веса. В результате применения модели LUAM получаем два интервальных вектора весов, которые ограничивают неизвестные реальные веса альтернатив двумя теоретическими ИМПС сверху и снизу. Эти результаты представляются менее удобными для дальнейшего использования, но в основном содержат решения моделей GPM и TLGP.

- Модели GPM и LUAM позволяют определить нормированные интервальные веса, а модель TLGP – нет. Модель TLGP работает в логарифмическом пространстве весов и предусматривает дальнейшее применение обратного преобразования. Интервальные веса, вычисленные моделью TLGP, требуют последующей нормировки с целью их использования в решении многокритериальной задачи. При выборе метода нормировки интервальных величин нужно учитывать, что применение расширенных бинарных операций часто приводит к неоправданно широким результирующим интервалам и поэтому не всегда оправданно на практике.

- Модель TLGP в качестве исходных данных использует элементы только одной треугольной части ИМПС, причем результаты по верхней и нижней частям матрицы эквивалентны между собой. Модели GPM и LUAM используют все элементы ИМПС.

- Модели GPM и TLGP в отличие от LUAM позволяют в некоторой степени оценить несогласованность ИМПС (исходных экспертных оценок). Оценками несогласованности в этих моделях могут служить оптимальные значения целевых функций J^*. Однако определяется только наличие несогласованности в

ИМПС, что соответствует $J^* \neq 0$. Модели GPM и TLGP не позволяют оценить допустимость этой несогласованности для ее использования в процессе принятия решений в отличие, например, от традиционного метода главного собственного вектора для четких МПС с разработаными пороговыми значениями, с которыми сравнивается показатель несогласованности.

- Целевая функция модели GPM содержит сумму всех отклонений по строкам заданной ИМПС от идеальной (теоретической) ИМПС. Поэтому становится возможным определить наиболее несогласованный элемент ИМПС путем нахождения максимального слагаемого в этой сумме, т.е. строки ИМПС, которая вносит наибольшее отклонение. Тогда можно осуществить повышение согласованности ИМПС, например, организуя обратную связь с экспертом, возвратив ему наиболее несогласованный элемент для пересмотра. Отметим, что модель LUAM не имеет подобного свойства, не позволяет осуществить повышение согласованности ИМПС, исключить циклы (нетранзитивные суждения экспертов) в этой матрице.

- Преимуществом модели GPM есть возможность достаточно легкого ее расширения на случай нечетких матриц парных сравнений, элементы которых заданы, например, треугольными или трапециевидными нечеткими множествами.

Исследуем результаты работы моделей GPM, LUAM и TLGP на ИМПС разного уровня несогласованности. Проведем также сравнение с результатами по традиционному методу главного собственного вектора (EM), построив для каждой из рассматриваемых ИМПС соответствующую четкую матрицу. Для облегчения сравнительного анализа представим результирующие по моделям GPM, LUAM и TLGP веса в дефаззифицированном виде.

Пример 1 (согласованная ИМПС). Рассмотрим согласованную ИМПС:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & [1;3] & [3;5] & [5;7] & [5;9] \\ \left[\frac{1}{3};1\right] & 1 & [1;4] & [1;5] & [1;4] \\ \left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right] & [\frac{1}{4};1] & 1 & \left[\frac{1}{5};5\right] & [2;4] \\ \left[\frac{1}{7};\frac{1}{5}\right] & [\frac{1}{5};1] & [\frac{1}{5};5] & 1 & [1;2] \\ \left[\frac{1}{9};\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4};1\right] & [\frac{1}{4};\frac{1}{2}] & \left[\frac{1}{2};1\right] & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 1

Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС A_1 (пример 1)

	TLGP	GPM	LUAM	EM
	$J^* = 0$			CR = 0.022
w_1	0.464	0.453	0.350	0.478
w_2	0.238	0.236	0.214	0.240
w_3	0.140	0.146	0.105	0.138
w_4	0.093	0.097	0.086	0.079
w_5	0.065	0.063	0.091	0.064

Согласованная ИМПС характеризуется наименьшим уровнем противоречивости экспертных суждений. Ранжирования, полученные моделями GPM, TLGP и традиционным EM, совпадают. Немного отличается ранжирование по модели LUAM, что может быть следствием применения более сложного метода дефаззификации двух интервальных векторов весов по верхней и нижней моделям.

Пример 2 (возмущенная согласованная ИМПС). Возмущенная ИМПС имитирует неточность и субъективность экспертных оценок. Она вычисляется на основании согласованной ИМПС путем добавления шума, а именно, каждый элемент согласованной ИМПС случайным образом сдвигается на 1–2 деления шкалы. Дефаззифицированные веса по разным моделям для такой ИМПС A_2 приведены в табл. 2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & [1;3] & [1;3] \\ 1 & 1 & 1 & [1;3] & [1;5] \\ 1 & 1 & 1 & 1 & [1;3] \\ \left[\frac{1}{3};1\right] & \left[\frac{1}{3};1\right] & 1 & 1 & 1 \\ \left[\frac{1}{3};1\right] & \left[\frac{1}{5};1\right] & \left[\frac{1}{3};1\right] & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2

Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС A_2 (пример 2)

	Эталонные веса	TLGP	GPM	LUAM	EM
		$J^* = 0{,}579$			CR = 0,014
w_1	0.263	0,220	0.241	0.230	0,249
w_2	0.273	0,220	0.269	0.245	0,258
w_3	0.203	0,200	0.218	0.230	0,220
w_4	0.154	0,194	0.138	0.150	0,148
w_5	0.106	0,166	0.132	0.145	0,121

Результаты по модели GPM, так же как и по EM, можно считать близкими к эталонным, поскольку задают ранжирование альтернатив $a_2 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$, которое совпадает с ранжированием эталонных весов. Модели TLGP и LUAM на данном примере показали хучшие результаты: они задают частичные ранжирования, не различая некоторые альтернативы.

Пример 3 (слабо согласованная ИМПС). МПС D называется **слабо согласованной**, если для всех ее элементов выполняются порядковые транзитивности: $(d_{ij} > 1) \wedge (d_{jk} > 1) \Rightarrow (d_{ik} > 1)$ [11]. Рассмотрим слабо согласованную ИМПС:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \left[\frac{1}{3};1\right] & \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{7};\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{3};1\right] \\ [1;3] & 1 & [3;5] & [4;6] & [1;3] \\ [2;4] & \left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right] & 1 & \left[\frac{1}{3};1\right] & \left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right] \\ [5;7] & \left[\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right] & [1;3] & 1 & \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] \\ [1;3] & \left[\frac{1}{3};1\right] & [3;5] & [2;4] & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 3

Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС A_3 (пример 3)

	Эталонные веса	TLGP	GPM	LUAM	EM
		$J^* = 1{,}610$			CR = 0,211
w_1	0.094	0,081	0.042	0.109	0.088
w_2	0.340	0,396	0.425	0.274	0.377
w_3	0.159	0,096	0.091	0.119	0.104
w_4	0.172	0,127	0.148	0.124	0.175
w_5	0.235	0,300	0.281	0.177	0.257

Несмотря на значительный уровень несогласованности данной ИМПС, все рассмотренные модели приводят к одинаковому полному ранжированию альтернатив $a_2 \succ a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1$, которое совпадает с эталонным ранжированием.

Пример 4 (слабо несогласованная ИМПС). Этот тип матриц моделирует нетранзитивные экспертные суждения. МПС D называется **слабо несогласованной**, если существует тройка ее элементов, такая что нарушается порядковая транзитивность на множестве сравниваемых альтернатив: $(d_{ij} > 1) \wedge (d_{jk} > 1) \wedge (d_{ik} < 1)$ [11]. Рассмотрим слабо несогласованную ИМПС:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & [1;\,5] & [4;\,8] & [3;\,7] & [2;\,6] \\ \left[\frac{1}{5};1\right] & 1 & \left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{7};\frac{1}{3}\right] & [3;\,7] \\ \left[\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right] & [2;\,6] & 1 & \left[\frac{1}{4};1\right] & \left[\frac{1}{7};\frac{1}{3}\right] \\ \left[\frac{1}{7};\frac{1}{3}\right] & [3;\,7] & [1;\,4] & 1 & [1;\,5] \\ \left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{7};\frac{1}{3}\right] & [3;\,7] & \left[\frac{1}{5};1\right] & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4

Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС A_4 (пример 4)

	Эталонные веса	TLGP	GPM	LUAM	EM
		$J^* = 2{,}036$			CR = 0,447
w_1	0,338	0,485	0.481	0.25	0,400
w_2	0,079	0,082	0.129	0.133	0,142
w_3	0,125	0,090	0.058	0.133	0,117
w_4	0,275	0,213	0.226	0.136	0,211
w_5	0,181	0,130	0.063	0.133	0,130

ИМПС A_4 имеет наибольший уровень несогласованности среди всех рассмотренных примеров. Для данного типа матриц наилучшие результаты показала модель TLGP: она привела к полному ранжированию $a_1 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_3 \succ a_2$, которое совпадает с эталонным. Все остальные модели дали в данном примере неверные результаты. Так, модель GPM, как и метод EM, привела к ранжированию $a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_3$, отличному от эталонного. Ранжирование по модели LUAM частично (альтернативы a_2, a_5, a_3 оказались неразличимы) и также отличается от эталона.

Заключение

Проведен анализ и сравнение моделей GPM, LUAM и TLGP парного оценивания альтернатив решений на основании интервальных матриц, построенных по экспертным суждениям в мультипликативных шкалах. Эти модели применяются как для согласованных, так и несогласованных ИМПС и в результате дают интервальные веса. Анализ результатов работы моделей выполнен на ИМПС разного уровня несогласованности. Также проведено сравнение с результатами, полученными традиционным методом главного собственного вектора на основе дефаззифицированных ИМПС.

Библиографические ссылки

1. **Саати, Т.Л.** Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети [Текст] / Т.Л. Саати. – М.: Книж. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 360 с.
2. **Saaty, T.L.** Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary [Text] / T.L. Saaty // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.145, №1. – P.85 – 91.

3. **Панкратова, Н.Д.** Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування [Текст]: навч. посіб. / Н.Д. Панкратова , Н.І. Недашківська. – К: ІВЦ «Вид-во «Політехніка», 2010. – 371 с.
4. **Corrente, S.** Multiple Criteria Hierarchy Process with ELECTRE and PROMETHEE [Text] / S. Corrente, S. Greco, R. Słowiński // Omega. – 2013. – Vol. 41, Issue 5. – P. 820–846.
5. **Циганок, В.В.** Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів [Текст] / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2008. – Т.10, №2. – С.121 – 127.
6. **Mikhailov, L.** Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgements [Text] / L. Mikhailov // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – Vol. 134(3). – P. 365–385.
7. **Chandran, B.** Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process [Text] / B. Chandran, B. Golden, E. Wasil // Computers & Operations Research. – 2005. – Vol.32. – P. 2235 – 2254.
8. **Wang, Y.M.** A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix [Text] / Y.M.Wang, T.M.S. Elhag //European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 177. – P. 458–471.
9. **Sugihara, K.** Interval priorities in AHP by interval regression analysis [Text] / K. Sugihara, H. Ishii, H. Tanaka // European Journal of operational research. – 2004. – Vol.158. – P. 745 – 754.
10. **Wang, Y.M.** A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices [Text] / Y.M. Wang, J.B. Yang, D.L. Xu // Fuzzy sets and systems. – 2005. – Vol.152. – P. 475 – 498.
11. **Недашківська, Н.І.** Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм [Текст] / Н.І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – №4. – С.67 – 79.

Надійшла до редколегії 14.09.2015