УДК 519.8

О.М. Кісельова*, Л.І. Лозовська*, Л.М. Бандоріна**
**Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*
***Національна металургійна академія України, м. Дніпропетровськ*

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН У РАЗІ ОБМЕЖЕНЬ НА ПОТУЖНОСТІ ІЗ ЗАДАНИМ РОЗТАШУВАННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

Розглянуто спеціального типу неперервну задачу оптимального розбиття множини із простору E_n у разі обмежень на потужності. При цьому оптимальне розбиття спільне для всіх продуктів одночасно. Запропоновано алгоритм розв'язання даної задачі, побудований на основі теорії оптимального розбиття множин.

Рассмотрена специального вида непрерывная задача оптимального разбиения множества из пространства E_n при ограничениях на мощности. При этом оптимальное разбиение является общим для всех продуктов одновременно. Предложен алгоритм решения этой задачи, построенный на основе теории оптимального разбиения множеств.

We consider a specific kind of a problem of optimal continuous partitioning of a set in E_n space with capacity restrictions. In this case the optimal partitioning is shared by all products. We suggest an algorithm for solving this problem which is based on the theory of optimal set partitioning.

Ключові слова: діаграма Діріхле − Вороного, функціонал Лагранжа, оптимальне розбиття множини, r-алгоритм.

Вступ. Інтенсивне впровадження медичної реформи потребує певної реорганізації закладів охорони здоров'я, що, у свою чергу, передбачає збільшення мережі медичних закладів, а також з'ясування оптимальних умов розміщення нових медичних установ за існуючих як часових, так і транспортних обмежень.

Стосовно оптимального розміщення медичних закладів із визначенням меж територій обслуговування населення можна виділити такі типи задач:

– розміщення амбулаторій у заданій області відповідно до вже функціонуючих медичних установ та знаходження меж територій, які вони обслуговуватимуть із урахуванням заданих обмежень;

– розширення мережі медичних закладів первинного рівня, знаходження оптимальних координат розміщення нових амбулаторій;

– будівництво нових закладів первинної ланки та знаходження оптимальних меж територій, які вони будуть обслуговувати.

Оскільки повне закриття існуючої мережі поліклінік і будівництво нових закладів економічно невиправдане й невигідне, доцільно розглянути задачі із визначення оптимальних меж територій обслуговування як функціонуючих поліклінік, так і часткового розширення їх мережі за рахунок будівництва нових медичних закладів.

Дані задачі можна розглядати як окремі випадки задач оптимального керування зведені в математичній постановці до задач оптимального розбиття множин (ОРМ) із розташуванням (або без) «центрів підмножин» для мінімізації деякого критерію якості розбиття [1]. Відмінність задач оптимального розміщення медичних закладів полягає у тому, що ці заклади необхідно розмістити із одночасним урахуванням усіх послуг, які надаватиме кожен заклад.

Постановка задачі. Метою нашого дослідження є аналіз однієї спеціального типу задачі ОРМ за обмежень на потужності у вигляді нерівностей із заданими центрами підмножин. При цьому необхідно побудувати оптимальне розбиття множини, спільне для всіх видів продукції, яку випускають.

Отже, постановка задачі визначення оптимальних меж територій, що будуть обслуговувати існуючі амбулаторії, матиме такий вигляд. Множину пацієнтів Ω можна розбивати на зони обслуговування Ω_i пацієнтів i-ї амбулаторії, що не перетинаються, при цьому сумарна кількість пацієнтів, яких обслуговує i-та амбулаторія і які потребують отримання j-ї послуги і проживають на ділянці Ω_i, не повинна перевищувати заданих обсягів [Там же]:

$$\int_{\Omega_i} \rho^j(x,y)dxdy \le b_i^j, \quad i=1,...,N,\ j=1,...,M, \tag{1}$$

де $\rho^j(x,y)$ – потреба в j-й послузі в точках (x,y); b_i^j – максимально можлива кількість послуг j-го типу, які надає i-та амбулаторія; M – кількість послуг; N – кількість центрів.

Не виключено, що деякі з підмножин Ω_i виявляться порожніми або кількість пацієнтів, яких обслуговують ці амбулаторії, буде менша допустимого рівня, прийнятого адміністрацією, у цьому випадку i-ту амбулаторію доцільно закрити.

Слід розбити множину пацієнтів Ω на зони обслуговування їх N амбулаторіями, тобто на підмножини Ω_i, $i = 1, ..., N$ так, щоб мінімізувати функціонал сумарної вартості амбулаторного обслуговування і транспортні витрати:

$$F(\Omega_1, ..., \Omega_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^{M} (c(x, y, \tau_i) + a_i^j) \rho^j (x, y) dxdy \to \min, \tag{2}$$

де $c(x,y,\tau_i)$ – функція визначення транспортних витрат; a_i^j – собівартість надання j-ї послуги i-ю амбулаторією.

Сукупна потужність усіх амбулаторій, які надаватимуть медичну допомогу, повинна перевищувати загальні потреби населення:

$$R = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j (x, y) dxdy \le \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} b_i^j, \ 0< b_i^j \le R, \quad i = 1,2,\ldots,N, \ j =1,2\ldots M, \tag{3}$$

де R – загальна потреба в медичних послугах у регіоні.

Результати. Нехай Ω – обмежена, замкнена та вимірювана за Лебегом множина у n-вимірному евклідовому просторі E_n. Сукупність вимірюваних за Лебегом підмножин $\Omega_1, ..., \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ називатимемо можливим розбиттям множини, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \ne j, i, j = 1, ..., N, \tag{4}$$

де $mes(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини Ω через $\sum_{\Omega}^{N}$. Тобто

$$\sum\nolimits_{\Omega}^{N} = \left\{ (\Omega_1, ..., \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \ne j, i, j = 1, ..., N \right\}. \tag{5}$$

Уведемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^{M} (c(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j (x) dx, \tag{6}$$

де функції $c(x, \tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірювані за x за будь-якого фіксованого $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)})$ із Ω для всіх $i = 1, ..., N$; $\rho^j(x)$ – обмежені, вимірювані, невід'ємні на Ω функції; a_i^j – задані невід'ємні числа.

Тоді під неперервною спеціального типу задачею оптимального розбиття множини Ω із E_n на його підмножини $\Omega_1, ..., \Omega_N$, що не перетинаються у разі обмежень у формі нерівностей із заданими координатами центрів $\tau_1, ..., \tau_N$ підмножин $\Omega_1, ..., \Omega_N$ відповідно, будемо розуміти таку задачу.

Задача А. Знайти

$$\min_{\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^{M} (c(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j (x) dx, \tag{7}$$

за умов

$$\begin{gathered} \int_{\Omega_i} \rho^j (x) dx \le b_i^j, \quad i = 1, ..., N, j = 1, ..., M, \\ \{\Omega_1, ..., \Omega_N\} \in \sum\nolimits_{\Omega}^{N}, \end{gathered} \tag{8}$$

де $x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_i^j – задані додатні числа, причому виконуються умови розв'язності задачі

$$\begin{gathered} S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j (x) dx \le \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} b_i^j, \\ 0 < b_i^j \le S, \quad i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., M. \end{gathered} \tag{9}$$

Уведемо характеристичну функцію підмножин Ω_i :

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega_i\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_i\end{cases}, \quad i=1,...,N. \tag{10}$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot))=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{M}(c(x,\tau_i)+a_i^j)\rho^j(x)\lambda_i(x)dx, \tag{11}$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вигляд $\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x))$. Очевидно, що

$$I(\lambda(\cdot))=F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\}). \tag{12}$$

Перепишемо задачу А за допомогою термінів характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножин Ω_i, $i=1,...,N$ у такому вигляді.

Задача В. Знайти вектор-функцію $\lambda_*(x)\in\Gamma_1$ таку, що

$$I(\lambda_*(\cdot))=\min_{\lambda\in\Gamma_1}I(\lambda(\cdot)) \tag{13}$$

де

$\Gamma_1=\{\quad \lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x))\in\Gamma_1^{'}$ майже всюди (м. в.) для $x\in\Omega$;
$\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i(x)dx\le b_i^j,\quad i=1,...,N,\ j=1,...,M\}$,
$\Gamma_1^{'}=\{\quad \lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)):\lambda_i(x)=0\vee 1$ м. в. для $x\in\Omega,\ i=1,...,N$,
$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1$ м. в. для $x\in\Omega\}$;
$\tau=(\tau_1,...,\tau_N)$ – заданий вектор із Ω^N .

Уведемо задачу **В** із булевими змінними $\lambda(\cdot)$ у відповідну задачу із неперервними змінними $\lambda(\cdot)$:

Задача С. Знайти вектор-функцію $\lambda_*(x)\in\Gamma_2$, таку, що

$$I(\lambda_*(\cdot))=\min_{\lambda\in\Gamma_2}I(\lambda(\cdot))$$

$$\Gamma_2=\{\quad \lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x))\in\Gamma \text{ м. в. для } x\in\Omega;$$

$$\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i(x)dx\le b_i^j,\quad i=1,...,N,\ j=1,...,M\},$$

де

$$\Gamma=\{\quad \lambda(x):0\le\lambda_i(x)=0\vee 1 \text{ для } x\in\Omega,\quad i=1,...,N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1 \text{ м. в. для } x\in\Omega\}.$$

Задача **С** має розв’язок.

Серед множини оптимальних розв’язків задачі **С** знаходяться оптимальні розв’язки задачі **В**. Розв’язання задачі **В** еквівалентне знаходженню сідлової точки функціонала Лагранжа.

Уведемо функціонал Лагранжа для задачі **В**:

$$h(\lambda(\cdot),\Psi)=I(\lambda(\cdot))+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Psi_i^j(\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i(x)dx-b_i^j). \tag{14}$$

де Ψ_i^j – дійсні невід’ємні числа (*i=1,…,N, j=1,…,M*), $\lambda(x)\in\Gamma$ для $x\in\Omega$.

Пару $(\lambda_*(\cdot),\Psi^*)$ називатимемо сідловою точкою функціонала (14) на множині $\Gamma\times\Lambda$, де

$$\Lambda=(\Psi=(\Psi_1^1,...,\Psi_1^M,...,\Psi_N^1,...,\Psi_N^M)\in E_{M\times N}:\Psi_i^j\ge 0,\ i=1,...,N,\ j=1,...M\},$$

якщо

$$h(\lambda_*(\cdot),\Psi)\le h(\lambda_*(\cdot),\Psi^*)\le h(\lambda(\cdot),\Psi^*)$$

для всіх $\lambda(x) \in \Gamma$, $\Psi \in \Lambda$ або

$$h\left(\lambda_*(\cdot), \Psi^*\right) = \min_{\lambda\in\Gamma} \sup_{\Psi\in\Lambda} h\left(\lambda(\cdot), \Psi\right) = \max_{\Psi\in\Lambda} \inf_{\lambda\in\Gamma} h\left(\lambda(\cdot), \Psi\right).$$

Позначимо

$$G(\Psi) = \inf_{\lambda\in\Gamma} h\left(\lambda(\cdot), \Psi\right),\ \Psi \in \Lambda. \tag{15}$$

Задача, двоїста до задачі **B**, має вигляд

$$G(\Psi) \to \max,\ \Psi \in \Lambda. \tag{16}$$

Для знаходження сідлової точки функціонала Лагранжа (14) конкретизуємо двоїсту задачу (16). Підставивши в (15) вираз для $h\left(\lambda(\cdot), \Psi\right)$ із (14), одержимо

$$G(\Psi) = \min_{\lambda\in\Gamma} \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_i) + a_i^j + \psi_i^j)\rho^j(x)\lambda_i(x)dx - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \psi_i^j b_i^j,\quad \Psi \in \Lambda. \tag{17}$$

Мінімальне значення функціонала $h\left(\lambda(\cdot), \Psi\right)$ із (17) для кожного $\Psi \in \Lambda$ досягається на вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), ..., \lambda_{*N}(x))$, *i*-та компонента якої має вигляд

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{якщо } \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_i) + a_i^j + \psi_i^j)\rho^j(x) \le \\ \quad \le \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_k) + a_k^j + \psi_k^j)\rho^j(x) \\ i \ne k \text{ м.в. для } x \in \Omega,\ k = 1,...,N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 \quad \text{в інших випадках, тоді } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}. \end{cases} \tag{18}$$

Підставивши у (17) замість $\lambda_i(x)$ вираз із (18) і врахувавши, що $\lambda_{*i}(x)$ задовольняє умову $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{*i}(x) = 1$ м. в. для $x \in \Omega$, одержимо

$$G(\Psi) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \psi_i^j b_i^j + \int_\Omega \min_{k=1,...,N} \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_k) + a_k^j + \psi_k^j)\rho^j(x)dx,\quad \Psi \in \Lambda. \tag{19}$$

Із вигляду оптимального розв'язку (18), за припущення, що виконуються умови $\rho^j(x) \ge 0$ для $x \in \Omega$, аналогічно до [1] випливає така теорема.

Теорема. Для того щоб можливе розбиття $(\Omega_{*1}, ..., \Omega_{*N})$ було оптимальне для задачі (4) – (6), необхідне і достатнє існування дійсних констант $\Psi_1^1, ..., \Psi_1^M, ..., \Psi_N^1, ..., \Psi_N^M$ таких, що

$$\sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_i) + a_i^j + \psi_i^j)\rho^j(x) \le \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_k) + a_k^j + \psi_k^j)\rho^j(x),\quad i \ne k \text{ м.в. для } x \in \Omega_{*i},\ i,k = 1,...,N. \tag{20}$$

Теорема. Сідлову точку $\left(\lambda_*(\cdot), \Psi^*\right)$ (де перша компонента $\lambda_*(\cdot)-$ оптимальний розв'язок задачі **B**) функціонала (14) на множині $\Gamma \times \Lambda$ визначають для *i=1,...,N* і майже всіх $x \in \Omega$ таким чином:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{для } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 \quad \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{21}$$

де

$$\Omega_{*i}(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \Omega : \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_i) + a_i^j + \psi_i^{j*})\rho^j(x) = \\ = \min_{k=1,...,N} \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_k) + a_k^j + \psi_k^{j*})\rho^j(x), i \ne k \text{ м.в. для } x \in \Omega \end{array} \right\},$$

як $\Psi_1^{1*}, ..., \Psi_1^{M*}, ..., \Psi_N^{1*}, ..., \Psi_N^{M*}$ обирають оптимальний розв'язок двоїстої задачі (16), зведеної до вигляду

$$G(\Psi) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\psi_i^j b_i^j + \\ + \int_{\Omega} \min_{k=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_k) + a_k^j + \psi_k^j)\rho^j(x)dx \to \max, \quad (22)$$

за умов

$$\Psi_i^j \geq 0, \quad i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,M. \quad (23)$$

Для розв'язання задачі (22), (23) застосуємо *r*-алгоритм [2]. Для цього перейдемо до задачі безумовної максимізації із уведенням у цільову функцію (22) негладкої штрафної функції множини $\{\Psi_i^j \geq 0, \quad i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,M\}$:

$$P(\Psi) = G(\Psi) - S \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \max(0, -\psi_i^j) \to \max, \Psi \in E_{M \times N}, \quad (24)$$

де S – достатньо велике додатне число (значно більше за максимальний множник Лагранжа для функції (22)).

Визначимо *i*-ту компоненту вектора узагальненого градієнта $g_P(\Psi) = (g_P^{\psi_1^1}(\Psi),\dots,g_P^{\psi_1^M}(\Psi),\dots,g_P^{\psi_N^1}(\Psi),\dots,g_P^{\psi_N^M}(\Psi))$ функції (24) у точці $\Psi = (\Psi_1^1,\dots,\Psi_1^M,\dots,\Psi_N^1,\dots,\Psi_N^M)$:

$$g_P^{\psi_i^j}(\Psi) = \int_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_i(x)dx - b_i^j + S \cdot \max(0, sign(-\psi_i^j)), \\ i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,M, \quad (25)$$

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{якщо} \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_i) + a_i^j + \psi_i^j)\rho^j(x) \leq \\ \quad \leq \sum_{j=1}^{M} (c(x,\tau_k) + a_k^j + \psi_k^j)\rho^j(x) \\ i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega,\ k = 1,\dots,N, \\ 0, \quad \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (26)$$

Опишемо алгоритм розв'язання задачі **A** [1].

Алгоритм. Область Ω уміщуємо в паралелепіпед Π, сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Уважатимемо $\rho^j(x) = 0$, $j=1,\dots,M$, для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед П покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\Psi = \Psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулою (26) за $\lambda^{(0)}(x)$. Обраховуємо значення $g_P^{\psi}(\Psi)$ у вузлах сітки за формулами (25) за $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\Psi = \Psi^{(0)}$. Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ *r*-алгоритму та знаходимо

$$\Psi^{(1)} = \Psi^{(0)} + h_0 g_P^{\psi}(\Psi^{(0)}).$$

Переходимо до другого кроку.

Нехай у результаті обчислень після *k, k=1,2,...* кроків алгоритму одержали певні значення $\Psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ у вузлах сітки. Опишемо (*k*+1)-й крок:

1. Обчислимо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулою (26) за $\Psi = \Psi^{(k)}$.
2. Обрахуємо значення $g_P^{\psi}(\Psi)$ за формулами (25) за $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.
3. Проведемо (*k*+1)-й крок *r*-алгоритму для максимізації функції (24) відносно Ψ на $E_{M \times N}$, коротка схема якого має вигляд

$$\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\Psi} \tilde{g}_P^{\psi}, \quad (27)$$

де B_{k+1}^{Ψ} – оператор відображення перетвореного простору в основний простір $E_{M \times N}$, причому $B_{k+1}^{\Psi} = I$ (I – одинична матриця); $\tilde{g}_P = B_{k+1}^{*} g_P(\Psi^{(k)})$; h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюють із умови мінімуму за напрямком.

4. Якщо умова

$$\left\|\Psi^{(k+1)}-\Psi^{(k)}\right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{28}$$

не виконується, перейдемо до (k+2)-го кроку алгоритму. Якщо виконується – до наступного пункту.

5. Уважатимемо $\Psi^* = \Psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконано умову (28).

6. Обчислимо оптимальне значення цільового функціонала за формулою (22) за $\Psi = \Psi^*$, а для контролю правильності розрахунку − за формулою

$$I\left(\lambda_*(\cdot)\right) = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(c(x,\tau_i)+a_i^j)\rho^j(x)\lambda_{*i}(x)dx. \tag{29}$$

Алгоритм описано.

Алгоритм реалізовано мовою C++ із використанням графічних бібліотек Qt. Програмний продукт протестовано на модельних задачах.

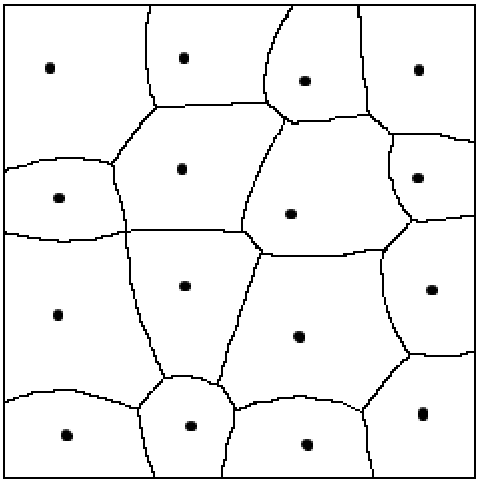
Подамо результати роботи алгоритму для розв’язання задачі оптимального розбиття множини на 16 підмножин із вхідними даними (таблиця).

Вихідні дані для задачі

№ центра	Координати центра (x; y)	Вектор b	Вектор a
1	(0.123; 0.125)	(0.8; 0.8; 0.4)	(0.4; 0.9; 0.3)
2	(0.126; 0.395)	(0.5; 0.3; 0.5)	(0.3; 0.5; 0.3)
3	(0.127; 0.645)	(0.3; 0.6; 0.6)	(0.2; 0.4; 0.6)
4	(0.125; 0.883)	(0.3; 0.5; 0.8)	(0.6; 0.3; 0.5)
5	(0.374; 0.106)	(0.5; 0.4; 0.2)	(0.2; 0.5; 0.2)
6	(0.376; 0.333)	(0.9; 0.4; 0.6)	(0.9; 0.4; 0.3)
7	(0.375; 0.587)	(0.6; 0.1; 0.4)	(0.1; 0.7; 0.1)
8	(0.373; 0.859)	(0.2; 0.7; 0.5)	(0.3; 0.2; 0.8)
9	(0.626; 0.14)	(0.4; 0.3; 0.6)	(0.2; 0.5; 0.5)
10	(0.624; 0.414)	(0.8; 0.5; 0.2)	(0.5; 0.6; 0.2)
11	(0.622; 0.667)	(0.4; 0.6; 0.1)	(0.2; 0.4; 0.3)
12	(0.622; 0.894)	(0.5; 0.8; 0.8)	(0.6; 0.8; 0.5)
13	(0.875; 0.118)	(0.1; 0.7; 0.6)	(0.1; 0.6; 0.6)
14	(0.873; 0.356)	(0.4; 0.3; 0.4)	(0.3; 0.5; .0.3)
15	(0.874; 0.609)	(0.3; 0.8; 0.3)	(0.4; 0.6; 0.3)
16	(0.875; 0.87)	(0.1; 0.9; 0.3)	(0.3; 0.7; 0.2)

При цьому задамо розмірність сітки 500, кількість надаваних послуг − M = 3.

У результаті роботи алгоритму за 13 ітерацій одержали значення функціонала 1,361. Оптимальне розбиття зображено нижче (рисунок).



Оптимальне розбиття на 16 підмножин

Висновки. Досліджено спеціального типу задачу оптимального розбиття множин із заданими положеннями центрів підмножин за обмежень на потужності підмножин. Побудовано математичну модель цієї задачі. Для розв'язання поставленої задачі розроблено алгоритм.

Створено зручний програмний продукт, що в доступній формі забезпечує числове розв'язання неперервної спеціального типу задачі оптимального розбиття множин із фіксованими центрами підмножин. Алгоритм програмно реалізовано мовою C++ із використанням графічних бібліотек Qt і протестовано на модельних задачах.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. − К.: Наук. думка, 2005. – 562 с.

2. **Шор, Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение [Текст] / Н.З. Шор. − К.: Наук. думка, 1979. − 200 с.

Надійшла до редколегії 13.04.2015