УДК 519.8

Е.М. Киселева[*], Л.С. Коряшкина[**], А.А. Михалева[*]
[*]*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*
[**]*ГВУЗ «Национальный горный университет», г. Днепропетровск*

ОПТИМАЛЬНОЕ МНОГОКРАТНОЕ ШАРОВОЕ ПОКРЫТИЕ НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрена непрерывная задача оптимального многократного шарового покрытия n-мерного ограниченного множества со сложной границей шарами минимального радиуса с дополнительными ограничениями на расположение центров шаров. Предложен подход к решению этой задачи, основанный на сочетании аппарата R-функций, штрафных функций и алгоритмов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Приведенные результаты вычислительных экспериментов.

Розглянуто неперервну задачу оптимального багатократного кульового покриття n-вимірної обмеженої множини зі складною границею кулями мінімального радіуса з додатковими обмеженнями на розташування центрів куль. Запропоновано підхід щодо розв'язання цієї задачі, заснований на поєднанні апарату R-функцій, штрафних функцій та алгоритмів розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин. Наведено результати обчислювальних експериментів.

The continuous problem of multiple covering of n-dimensional bounded set with complex boundary by balls of the smallest radius under additional restrictions on the placing of balls' centers is considered. Presented approach to solving this problem is based on a combination of apparatuses of R-functions and penalty functions and algorithms for solving of continuous problems of optimal sets partitioning. The results of computational experiments is given.

Ключевые слова: непрерывная задача многократного покрытия, оптимальное k-кратное шаровое покрытие, R-функции, диаграммы Вороного высших порядков, штрафная функция, недифференцируемая оптимизация.

Введение. Разработке и обоснованию методов решения задач многократного шарового покрытия ограниченных областей с применением теории оптимального разбиения множеств (ОРМ) [1] посвящены работы [2–6]. Интенсивное исследование задач многократного покрытия обусловлено широким спектром их практических приложений [2; 3]. В [2 – 5] представлены математические модели непрерывных задач многократного шарового покрытия с различными критериями качества покрытия и конструктивные методы их решения. Во избежание ситуаций, когда оптимальное размещение центров шаров, образующих покрытие заданной области, включает «почти слипшиеся» центры, что на практике не допустимо, в [6] сформулирована задача многократного покрытия ограниченной в E_n области кругами минимального радиуса с дополнительными условиями на расположение центров, а также представлен алгоритм приближенного решения таких задач.

В данной работе основной акцент сделан на алгоритмическое задание формы покрываемой области, учет ее границ при размещении центров шаров, образующих многократное покрытие области.

Математическая модель задачи многократного оптимального шарового покрытия с ограничениями [6]. Пусть $\Omega \subset E_n$ – ограниченное, замкнутое множество, $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \le R\}$ – c-шар радиуса R с центром в точке τ_i из Ω, где $c(x, \tau_i)$ – некоторая метрика (евклидова, манхэттенская). Требуется определить величину радиуса оптимального покрытия

$$\hat{R}(\tau_*^N) = \min_{(\tau_1,..., \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1,...,N} c(x, \tau_i), \tag{1}$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, ..., \tau_N^*)$, на котором достигается значение $\hat{R}(\tau_*^N)$, при условиях:

$$\forall x \in \Omega: \ x \in \bigcap_{j=1}^{l} B(\tau_{i_j}, \hat{R}), \ i_j \in \{1, 2, ..., N\}, \ k \le l \le N; \tag{2}$$

$$\min_{(i,j): i > j} c(\tau_i, \tau_j) \ge \sigma, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{3}$$

где $\sigma > 0$ – заданная величина.

k–кратное покрытие множества Ω, задаваемое вектором $\tau^N = (\tau_1, ..., \tau_N)$ и удовлетворяющее условиям (2), с радиусом $\hat{R}(\tau^N)$, определяемым формулой (1), является **минимальным *k*–кратным *c*-шаровым покрытием, генерируемым вектором** τ^N.

Ограничение (3) отвечает за такое размещение центров (сервисов), при котором каждые два из них находились бы на расстоянии, не меньшем σ .

Как указано в [2; 3], при разработке метода решения задачи о многократном шаровом покрытии более конструктивной оказывается следующая форма записи ее математической модели.

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n, $\tau^N = (\tau_1,...,\tau_N)$ – некоторый заданный на множестве Ω (или в пространстве E_n) набор точек. Будем говорить, что точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2},...,\tau_{i_k}$ образуют набор *k*–ближайших соседей точки $x \in \Omega$ из заданных *N* точек, если

$$\forall j = \overline{1,k} \quad c(x,\tau_{i_j}) \le c(x,\tau_m), \quad m \in \{1, 2, ..., N\} \setminus \{i_1, i_2,...,i_k\}, \qquad (4)$$

причем индексы $i_1, i_2,...,i_k$ принимают наименьшие возможные значения.

Введем в рассмотрение множество Λ_N^k :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, \mathrm{i} = \overline{1,N};\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = k \right\}.$$

Тогда для каждой точки $x \in \Omega$ набор *k*–ближайших соседей из фиксированного набора точек $(\tau_1,...,\tau_N)$ находится, решая задачу поиска такого вектора $\lambda(x) = (\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)) \in \Lambda$, при котором достигается минимальное значение следующей величины:

$$C(x) = \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x).$$

Задача о поиске радиуса *N* кругов, образующих ***k***–кратное ***c***-шаровое покрытие множества состоит в отыскании величины

$$\bar{R} = \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{\mathrm{i}=\overline{1,N}} c(\mathrm{x},\tau_i)\lambda_i(x).$$

Задачу о минимальном ***k***–кратном ***c***-шаровом покрытии с размещением центров шаров с ограничениями математически сформулируем так: требуется найти величину

$$\bar{R}(\lambda^*(\cdot),\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x), \qquad (5)$$

а также вектор-функцию $\lambda^*(x) \in \hat{\Lambda}$ и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*,...,\tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$, при которых в (5) достигается нижняя грань и выполняются условия (3).

Аналитическое описание формы покрываемой области. Следует заметить, что при решении задачи покрытия ограниченных областей со сложными границами иногда достаточно простого кодирования элементов чертежей (изображений, рисунков) или поточечного их сканирования. Такой подход к описанию области возможен, если, например, не требовать размещения центров шаров, покрывающих область, в самой области. Алгоритм, описанный в [3], как раз и предполагает такой способ задания покрываемой области. Если же искать координаты центров внутри покрываемой области, а область имеет достаточно сложную границу, то необходимо задать эту границу в той форме, которая принята в аналитической геометрии – с помощью уравнений и неравенств. В дальнейшем, при разработке алгоритма оптимального многократного покрытия области, следует учитывать эти математические конструкции при отыскании координат размещаемых центров шаров.

Как известно, одним из методов, применяемых к решению обратной задачи геометрии – построение уравнений заданных геометрических объектов – является метод R-функций Р.Л. Рвачева [4]. С помощью R-функций возможно построение в неявной форме уравнений границ составных областей по известным уравнениям простых областей.

Для задания геометрии области воспользуемся аппаратом **R**-функций. Приведем некоторые понятия и теоремы из теории **R**-функций, следуя [7].

Определение. Точку $M(x_1,x_2,...,x_n)$ пространства $X \subset E_n$ называют *вырожденной*, если хотя бы одна из ее координат равна нулю. В противном случае точку называют *невырожденной*.

Множество всех вырожденных точек пространства X представляет собой объединение n гиперплоскостей $x_i, i = 1,2,...,n$, которое можно рассматривать как единую гиперповерхность H. Гиперповерхность H разбивает n-мерное пространство на 2^n областей $\mathrm{H}_j,\ j = 1,2,...,2^n$.

Определение. Функцию $y = f(x_1,x_2,...,x_n)$, определенную всюду в пространстве X, называют **R-функцией**, если в каждой из областей $\mathrm{H}_j,\ j = 1,2,...,2^n$, она сохраняет постоянный знак, т. е.

$$S\left[f(x_1,x_2,...,x_n) \right] = F_i = \mathrm{const},$$

где $S(z)$ – двузначный предикат, с помощью которого определяется принадлежность величины z к одному из классов положительных или отрицательных чисел:

$$S(z)=\frac{1+\operatorname{sign}(z)}{2}, \quad z\neq 0;$$

F_i – двоичная величина, одна и та же для всех точек области $\mathrm{H}_j,\ j=1,2,\dots,2^n$.

Для того чтобы функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ была R-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию:

$$S\left[f(x_1,x_2,\dots,x_n)\right]=F\left(S(x_1),S(x_2),\dots,S(x_n)\right),$$

где $F(X_1,X_2,\dots,X_n)$ – некоторая булева функция.

Примерами **R**-функций в двумерном пространстве и соответствующих им булевых функций являются, например, следующие пары:

1) $y=x_1x_2$, $\quad F(X_1,X_2)=X_1\to X_2$;

2) $y=x_1$, $\quad F(X_1)=\bar{X}_1$;

3) $x_1\wedge_\alpha x_2\equiv\dfrac{\left(x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+x_2^2-2\alpha\cdot x_1x_2}\right)}{2}$, $\quad F(X_1,X_2)=X_1\wedge X_2$;

4) $x_1\vee_\alpha x_2\equiv\dfrac{\left(x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+x_2^2-2\alpha\cdot x_1x_2}\right)}{2}$, $\quad F(X_1,X_2)=X_1\vee X_2$; $-1<\alpha\leq 1$.

Функцию $x_1\wedge_\alpha x_2$ называют **R**-конъюнкцией, функцию $x_1\vee_\alpha x_2$ – **R**-дизъюнкцией.

Метод описания геометрических двумерных областей сложной формы с помощью **R**-функций основывается на следующей теореме.

Теорема. Если области $D_1,D_2,\dots,D_m$ определяются соответственно неравенствами

$$f_1(x_1,x_2)\geq 0;\ f_2(x_1,x_2)\geq 0;\dots;\ f_m(x_1,x_2)\geq 0,$$

а логика построения области D задана булевой функцией $D=F\left[D_1,D_2,\dots,D_m\right]$, то неравенство

$$\psi(x_1,x_2)\equiv\phi\left[f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2),\dots,\ f_m(x_1,x_2)\right]\geq 0,$$

где $\phi\left[z_1;z_2;\dots;z_m\right]$ – **R**-функция, соответствующая булевой функции $D=F\left[D_1,D_2,\dots,D_m\right]$, определяет область D.

Применение описанного метода для решения задач оптимального покрытия множеств, имеющих сложную форму, приведем ниже, после описания метода и алгоритма решения задачи об оптимальном многократном покрытии заданного множества.

Описание метода решения. Поскольку для компактного множества Ω из E_n и непрерывной функции $c(x,\tau)$ оптимальное ***k***–кратное покрытие множества Ω заданным числом N *c*-шаров одинакового радиуса существует, то задачу (5) можно переписать следующим образом:

$$\hat{R}(\tau_1,\dots,\tau_N)\ \to \min_{(\tau_1,\dots,\ \tau_N)\in\Omega^N}, \tag{6}$$

где

$$\hat{R}(\tau_1,\dots,\tau_N)=\max_{x\in\Omega}\ \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k}\ \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x).$$

Свойства целевой функции $\hat{R}(\tau_1,\dots,\tau_N)$ задачи (6) для случая евклидовой нормы $c(x,\tau_i)$ рассмотрены в [4,5]. Одно из них, полезное для дальнейшего описания алгоритма решения задачи, приведем здесь.

Свойство. Для непустого компактного множества Ω из E_n и $(\tau_1,\dots,\tau_N)$ из Ω^N справедливо следующее равенство:

$$\hat{R}(\tau_1,\dots,\tau_N)=\max_{x\in\Omega}\ \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k}\ \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x)=\max_{m=1,\dots,M}\ \max_{x\in\Omega_m}\ \max_{i\in\mathrm{T}_m} c(x,\tau_i),$$

где множества $\Omega_m,\ m=\overline{1,M}$, $M\leq C_N^k$, составляют ***k***–кратную диаграмму Вороного для множества Ω, т.е. такое разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1,\dots,\Omega_M$, что:

$$\bigcup_{i=1}^{M}\Omega_i=\Omega;\quad mes(\Omega_i\cap\Omega_j)=0,\ \forall i\neq j,\ i,j=\overline{1,M};$$

$$\Omega_m = \left\{ x \in \Omega : \forall j \in T_m \quad c(x,\tau_j) < c(x,\tau_i), \quad i \in \{1, 2, ..., N\} \setminus T_m \right\},$$

где $T_m = \left\{ i_1^m, i_2^m, ..., i_k^m \right\}$, $m = \overline{1, M}$ – всевозможные k-элементные подмножества множества индексов $\{1, 2, ..., N\}$.

Поскольку множество Ω_m определяется набором из k центров с индексами $i_1^m, i_2^m, ..., i_k^m$, вместо Ω_m будем использовать обозначение $\Omega(\overline{\tau}^{T_m})$, указывая при этом, что данная ячейка Вороного соответствует набору центров $\overline{\tau}^{T_m} = \left\{ \tau_{i_1^m}, \tau_{i_2^m}, ..., \tau_{i_k^m} \right\}$.

Приведем далее формулы для вычисления субградиента целевой функции $\hat{R}(\tau_1, ..., \tau_N)$ задачи (6).

Обозначим через V фиксированное разбиение непустого компактного множества Ω на $\overline{M} \le C_N^k$ подмножеств $V_1, ..., V_m, ..., V_{\overline{M}}$, составляющих $\boldsymbol{k}$–кратную диаграмму Вороного для Ω, причем все V_i – непустые, компактные.

Введем также для каждого $i = 1, ..., N$ функции

$$R_i(\tau^N) = \max_{T_m : i \in T_m} \max_{x \in V(\overline{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i). \tag{7}$$

Субградиентное множество $G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N)$ в точке $\hat{\tau}^N$ функции (7) вычисляем по формуле

$$G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N) = \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{x \in I(\hat{\tau}^N)} G_{c(x,\tau_i)}(\hat{\tau}^N), \tag{8}$$

где $I(\hat{\tau}^N) = \left\{ x : x \in \bigcup_{m : i \in T_m} V_m ; c(x, \hat{\tau}_i) = R_i(\hat{\tau}^N) \right\}$; $G_{c(x,\tau_i)}(\hat{\tau}^N)$ – субдифференциал функции $c(x,\tau_i)$ по τ_i на E_n при фиксированном $x \in V_i$.

Обобщенный градиент целевой функции задачи (6) имеет следующий вид:

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), ..., g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), ..., g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)),$$

i-я компонента которого является элементом субградиентного множества функции $R_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, из (7) в точке τ_i, записываемого так:

$$G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^N) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\overline{x}, \tau^N), \overline{x} : c(\overline{x}, \tau_i) = \max_{T_m : i \in T_m} \max_{x \in V(\overline{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i) \right\}, \quad i = 1, ..., N, \tag{9}$$

где $g_c^{\tau_i}(\overline{x}, \tau^N)$ – обобщенный градиент функции $c(x,\tau_i)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, ..., \tau_i, ..., \tau_N)$, а $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)})$. Как замечено в [4, 5], субградиентное множество $G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^N)$ непустое, выпуклое, компактное.

В формуле (9) T_m – m-е подмножество фиксированного k-кратного разбиения множества Ω. Однако, если разбиение множества Ω на подмножества не фиксированно и неизвестно заранее положение точек $\tau_1, ..., \tau_N$, генерирующих оптимальное покрытие множества Ω, а значит, и соответствующее $\boldsymbol{k}$-кратное разбиение Вороного, то функция $\hat{R}(\tau_1, ..., \tau_N)$ задачи (6) не является выпуклой на Ω^N вследствие невыпуклости по $\tau^N = (\tau_1, ..., \tau_N)$ на Ω^N функции $\hat{r}\left(x, \tau^N\right) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i = \overline{1, N}} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$.

Хотя функция $\hat{r}\left(x, \tau^N\right)$ не является выпуклой по τ^N при любом фиксированном $x \in \Omega$, она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции $\hat{R}(\tau_1, ..., \tau_N)$, поэтому ее почти градиент совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Далее опишем подход к решению задачи об оптимальном шаровом покрытии, в которой требуется принадлежность всех центров шаров покрываемой области. Алгоритм решения задачи в случае, когда центры могут выходить за пределы заданной области, представлен в [4; 5].

Для решения задачи (5), (3) предлагаем следующий подход. Для учета дополнительных условий (3) в задаче многократного покрытия введем в рассмотрение штрафную функцию вида

$$P_1(\tau_1, ..., \tau_N) = M \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \max{}^2 \left(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j) \right),$$

где $M >> 0$ – коэффициент штрафа. Для учета принадлежности размещаемых центров заданному множеству Ω введем функцию штрафа, накладываемого за выход за пределы этого множества. Пусть

логика построения области Ω задана булевой функцией $\Omega = F\left[D_1, D_2, ..., D_m\right]$, где области $D_1, D_2, ..., D_m$ определяются неравенствами
$f_1(x) \ge 0;\ f_2(x) \ge 0; ...;\ f_m(x) \ge 0$,
а неравенство

$$\psi(x) \equiv \phi\left[f_1(x),\ f_2(x), ..., f_m(x)\right] \ge 0,$$

где $\phi\left[z_1; z_2; ...; z_m\right]$ – **R**-функция, соответствующая булевой функции $D = F\left[D_1, D_2, ..., D_m\right]$, определяет область Ω. Пусть функция $P_2 : E_n \to R$ такова, что

$$P_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \psi(\tau) \ge 0 \\ > 0, & \psi(\tau) < 0. \end{cases}$$

Тогда от задачи (5), (3) совершаем переход к задаче без ограничений (задаче со штрафами):

$$\bar{R}_M(\tau^N) \to \min_{(\tau_1, ..., \tau_N) \in \Omega^N}, \tag{10}$$

где

$$\bar{R}_M(\tau^N) = \hat{R}(\tau_1, ..., \tau_N) + P_1(\tau_1, ..., \tau_N) + M \sum_{i=1}^{N} P_2(\tau_i) =$$

$$\max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1,N} c(x, \tau_i)\lambda_i(x) + P_1(\tau_1, ..., \tau_N) + M \sum_{i=1}^{N} P_2(\tau_i).$$

Численный алгоритм решения задачи (10), приведенный ниже, базируется на методе обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов (r-алгоритм Шора [8, 9]). При этом j-ю компоненту N-мерного вектора обобщенного градиента

$$g_{\bar{R}_M}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \ldots, g^{\tau_j}(\tau^N), \ldots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \tag{11}$$

функции $\bar{R}_M(\tau^N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, ..., \tau_N)$ будем вычислять по формуле

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = g^{\tau_j}_{R_j^V}(\tau^N) + \frac{\partial P_1(\tau_1, ..., \tau_N)}{\partial \tau_j} + M \frac{\partial P_2(\tau_j)}{\partial \tau_j}, \tag{12}$$

где $g^{\tau_j}_{R_j^V}(\tau^N) \in G^{\tau_j}_{R_j^V}(\tau^N)$ (см. формулу (9));

$$\frac{\partial P_1(\tau_1, ..., \tau_N)}{\partial \tau_j} = M \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{N} \max\left(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)\right) \frac{\partial c(\tau_j, \tau_i)}{\partial \tau_j};$$

$$\frac{\partial P_2(\tau_j)}{\partial \tau_j} = \max\left(0, -\mathrm{sign}(\psi(\tau_j))\right) \frac{\partial \psi(\tau_j)}{\partial \tau_j}.$$

Алгоритмы решения задач оптимального многократного шарового покрытия заданного множества

Представим приближенный алгоритм решения задачи о поиске радиуса N кругов, образующих k–кратное *c*-шаровое покрытие множества, а также алгоритм решения задачи о минимальном *k*–кратном *c*-шаровом покрытии с размещением центров шаров в области Ω так, чтобы минимальное расстояние между каждыми двумя центрами было не меньше заданной величины σ.

Приведем и проанализируем результаты некоторых вычислительных экспериментов.

Для упрощения обозначений в алгоритме вместо вектора τ^N будем писать τ.

Вначале приведем алгоритм решения задачи о поиске радиуса *N* кругов, образующих *k*–кратное покрытие заданного множества Ω из E_n *c*-шарами с фиксированными центрами. Если область Ω имеет сложную форму, то заключим Ω в n-мерный параллелепипед П, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, введя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на П, такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \in \Pi \backslash \Omega, \\ 1 & \text{для} \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

и в задаче (6) под функцией $c(x, \tau_i)$ будем понимать функцию $c(x, \tau_i)\ \rho(x)$, определенную на параллелепипеде П и совпадающую с $c(x, \tau_i)$ на Ω.

Алгоритм 1-К

Предварительный этап. Параллелепипед П покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j,\ j = 1,...,n$; обозначим $\tilde{\Pi}$ – множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия τ = ($\tau_1,...,\tau_N$).

Шаг 1. Для каждой точки x сетки $\tilde{\Pi}$ строим массив расстояний от этой точки до всех центров: $D(x) = \left(c\left(x,\tau_1\right),\ c\left(x,\tau_2\right),\ \ldots,\ c\left(x,\tau_N\right)\right)$.

Шаг 2. Полученный массив расстояний $D(x)$ сортируем по возрастанию элементов.

Шаг 3. В каждом отсортированном массиве отбираем элемент с порядковым номером *k*, обозначим этот элемент $c^k(x,\tau_{i_k})$.

Шаг 4. Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$\tilde{R} = \max_{x\in\tilde{\Pi}} c^k(x,\tau_{i_k}).$$

Полученное максимальное значение и является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках $\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$, которые k–кратно покрывают множество Ω.

Алгоритм **1-К** описан.

Представим далее один из возможных численных алгоритмов решения задачи (10) об оптимальном k–кратном покрытии – отыскания координат центров $\left(\tau_1^*,...,\tau_N^*\right)$, минимизирующих целевую функцию $\bar{R}_M(\tau^N)$. В основе этого алгоритма лежит метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. Составной частью алгоритма является этап построения *k*–кратной диаграммы Вороного и вычисление вектора обобщенного градиента целевой функции задачи (10) по формулам (11) – (12).

Алгоритм 2-К

Предварительный этап. Куб Ω покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j,\ j = 1,...,n$. Множество узлов прямоугольной сетки на множестве Ω обозначим $\tilde{\Omega}$. Задаем величину штрафа M>>0. Задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)})$. Вычисляем по этим центрам величину $\hat{R}(\tau^{(0)})=$ $\max\limits_{x\in\tilde{\Omega}}\ \min\limits_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k}\ \max\limits_{i=1,N} c(x,\tau_i^{(0)})\lambda_i(x)$, используя алгоритм 1-К решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k–кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω. При этом для каждого $i=1,...,N$ вычисляем значение функции (7): $R_i(\tau^{(0)}) = \max\limits_{T_m:i\in T_m}\ \max\limits_{x\in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x,\tau_i^{(0)})$. Вычисляем величину $\bar{R}_M(\tau^{(0)}) = \hat{R}(\tau^{(0)}) +$ $P(\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)})$.

По формуле (9) строим субградиентное множество $G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) = = \overline{co}\left\{g_c^{\tau_i}(\bar{x},\tau^{(0)}),\ \bar{x} : c(\bar{x},\tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)})\right\}$, $i=1,...,N$, где $g_c^{\tau_i}(\bar{x},\tau^{(0)})$ – обобщенный градиент функции $c(x,\tau_i)$ в точке $\tau^{(0)}$. Выбираем вектор $g_{\bar{R}_M}(\tau^{(0)})$ по формулам (11), (12), задаем начальный пробный шаг r-алгоритма $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = \tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}(\tau^{(0)}),$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после m, m = 1, 2,..., шагов алгоритма получен вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)})$. Опишем **(m+1)-й шаг** алгоритма.

По центрам $\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}$ с помощью алгоритма **1-К** вычисляем величину

$$\hat{R}(\tau^{(m)}) = \max_{x\in\tilde{\Omega}}\ \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k}\ \max_{i=1,N} c(x,\tau_i^{(m)})\lambda_i(x),$$

используя алгоритм 1-К решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k–кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω. При этом для каждого $i=1,...,N$ вычисляем значение функции (7):

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_m:i\in T_m}\ \max_{x\in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x,\tau_i^{(m)}).$$

2. По формуле (9) строим субградиентное множество $G^{\tau_i}_{R_i^V}(\tau^{(m)})$. Выбираем вектор $g_{\bar{R}_M}(\tau^{(m)})$ по формулам (11), (12). Проводим (m+1)-й шаг r-алгоритма в H-форме [8], итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(m)} = \tau^{(m)} - h_m \frac{\mathrm{H}_{m+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(\mathrm{H}_{m+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(m)}),\ g_{\bar{R}}(\tau^{(m)}))}},$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным от 3 до 7) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$\mathrm{H}_{m+1} = \mathrm{H}_m + (1/\alpha^2 - 1)\dfrac{\mathrm{H}_m \xi_m \xi_m^T \mathrm{H}_k}{(\mathrm{H}_m \xi_m, \xi_m)}$, $\xi_m = g_{\bar{R}}(\tau^{(m)}) - g_{\bar{R}}(\tau^{(m-1)})$. Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия

$$\min_{h>0} \bar{R}\left(\tau^{(m)} - h\frac{\mathrm{H}_{m+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{\left(\mathrm{H}_{m+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(m)}),\ g_{\bar{R}}(\tau^{(m)})\right)}}\right).$$

Если условие

$$\left\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{13}$$

не выполняется, переходим к (m+2)-му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (13) завершения работы алгоритма.

Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1,N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

с помощью алгоритма **1-К**.

Алгоритм **2-К** описан.

Анализ результатов вычислительных экспериментов. Приведем здесь результаты решения задачи об оптимальном шаровом покрытии области Ω, представляющей собой квадрат $[0,1]\times[0,1]$ за исключением внутренности круга $(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \le 0.09$. Указанную область Ω можно представить с помощью следующих областей:

D$_1$: $0.09 - (x_1 - 0.5)^2 - (x_2 - 0.5)^2 \le 0$; **D**$_2$: $x_1 - 1 \le 0$; **D**$_3$: $-x_1 \le 0$;

D$_4$: $x_2 - 1 \le 0$; **D**$_5$: $-x_2 \le 0$.

Логика построения области Ω определяется формулой

$$\Omega = (\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{D}_2 \wedge \mathbf{D}_3 \wedge \mathbf{D}_4 \wedge \mathbf{D}_5) = (\bigwedge_{i=1}^{i=6} \mathbf{D}_i).$$

Область Ω определяется неравенством

$$\psi(x_1, x_2) = \wedge_{\alpha_i}{}_{i=1}^{i=6} f_i(x_1, x_2) \le 0,$$

где $f_i(x_1, x_2), i = 1,...,5$, – левые части неравенств, задающих соответствующие области.

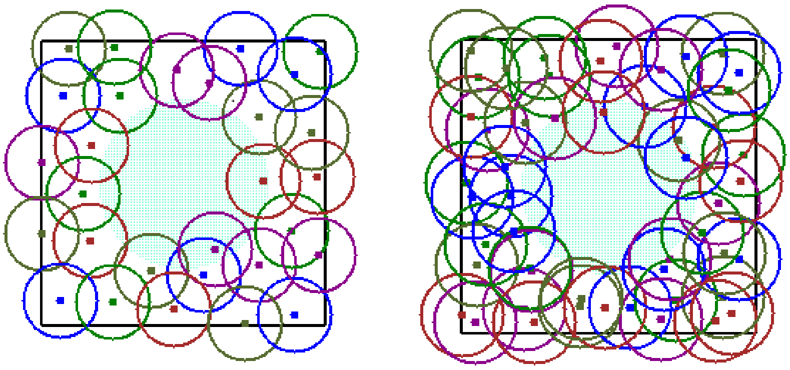
На рис. 1 представлены результаты одно- и двукратного покрытия описанной выше области 29-ю и 51-им c-шарами соответственно, полученные при решении задачи (1), (2) с помощью алгоритма **2-К,** метрика – евклидова:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x^j - \tau_i^j\right)^2}.$$

Нетрудно заметить, что и в одном, и в другом случае почти все центры размещены внутри Ω. Те единичные центры, которые вышли за границу области, фактически для покрытия соответствующей кратности являются лишними, так как обеспечивают покрытие той части области, которая уже покрыта шарами с соседними центрами. Так как ограничения (3) в данном случае не учитывались, то и расположение центров при двукратном оптимальном покрытии (рис. 1, б) получилось таковым, что некоторые центры практически совмещены.

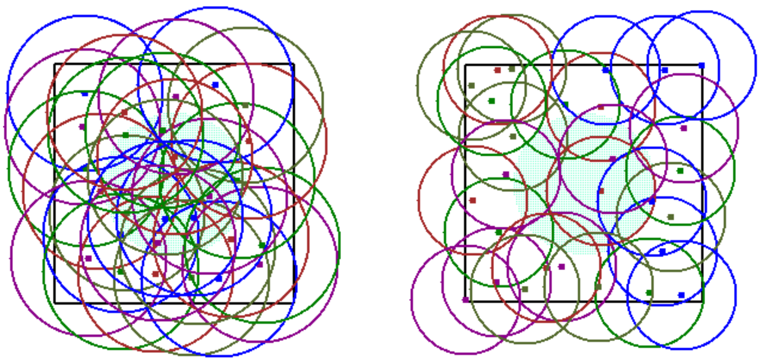
На рис. 2 *а, б* приведены результаты работы алгоритмов 1-К и 2-К соответственно при решении задачи об оптимальном двукратном шаровом покрытии множества Ω 29-ю *c*-шарами (евклидова метрика). Причем случай 2, *б* соответствует решению задачи (1) – (3) с ограничениями, минимальное расстояние между ближайшими центрами не меньше 0.07. Как и в предыдущем случае, два центра, которые оказались вне допустимой области для оптимального двукратного покрытия, не играют никакой роли, так как лишний раз покрывают уже покрытую дважды область.

Заключение. Таким образом, в работе представлены математическая модель и метод решения непрерывной задачи многократного покрытия области, имеющей сложную форму, шарами минимального радиуса. Задачу также характеризует наличие ограничений на расстояние между размещаемыми сервисными центрами. Кроме того, разработан и программно реализован алгоритм решения указанной задачи, основанный на задании области с помощью R-функций, дискретизации заданной области, применении аппарата штрафных функций для учета ограничений и границ покрываемой области, а также r-алгоритма Шора для решения полученной задачи недифференцируемой оптимизации. Для приближенного вычисления компонент субградиента расширенной целевой функции использовались диаграммы Вороного высших порядков.



а N=29, k=1; R=0.1308 *б* N=51, k=2; R=0.1423

Рис. 1. k-кратное покрытие невыпуклой области, метрика евклидова



а N=29, k=2 *б* N=29, k=2; R=0.23005

Рис. 2. Двукратное покрытие невыпуклой области:
а – с заданными центрами с-шаров; *б* – с размещением центров при условиях

Библиографические ссылки

1. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения [Текст]: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.

2. **Киселева, Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи [Текст]: монография / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.

3. **Михалева, А.А**. Непрерывные задачи оптимального шарового покрытия и их практические приложения [Текст] / А.А. Михалева // III Международный форум студентов, аспирантов, молодых ученых. – Днепропетровск, 2015. – С. 504 – 506.

4. **Киселева, Е.М.** Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева // Системные технологии. – Д.: ДМетАУ, 2014. – Вып. 4 (93). – С. 3 – 16.

5. **Коряшкина, Л.С.** Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия [Текст] / Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева, В.И. Навоенко // Питання прикл. математики і математ. моделювання. Зб. наук. пр. – Дніпропетровськ, 2014. – С. 141 – 154.

6. **Киселева, Е.М.** Непрерывная задача многократного шарового покрытия с ограничениями и метод ее решения [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева // Системні технології. – Дніпропетровськ. – 2015. – №1. – С. 165 – 179.

7. **Рвачёв, В.Л.** Теория R-функций и некоторые её приложения [Текст] / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
8. **Шор, Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение [Текст] / Н.З Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
9. **Шор, Н.З.** Использование модификации r – алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций [Текст] / Н. З. Шор, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28−49.

Надійшла до редколегії 01.06.2015