УДК 519.8

Е.М. Киселева, Л. Л. Гарт, П.А. Довгай
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Исследован на основе метода неопределенных коэффициентов вопрос о нахождении наименьшего допустимого количества элементов детерминированного дискретного временного ряда для получения значений его производной первого порядка с заданной точностью вычислений. Разработан программный продукт, позволяющий на классе гладких функций моделировать погрешность численного дифференцирования, проведен анализ вычислительных экспериментов.

Досліджено на основі методу невизначених коефіцієнтів питання про знаходження найменшої допустимої кількості елементів детермінованого дискретного часового ряду для отримання значень його похідної першого порядку із заданою точністю обчислень. Розроблено програмний продукт, що дозволяє на класі гладких функцій моделювати похибку чисельного диференціювання, проведено аналіз обчислювальних експериментів.

The problem of finding least admissible number of a determined discrete time series elements for obtaining its derivative of the first order values with a given precision is investigated on a base of the indeterminate coefficients method. The program of modeling numerical differentiation error for smooth functions class is worked out, the analysis of computing tests is carried out.

Ключевые слова: временной ряд, производная первого порядка, аппроксимация, метод неопределенных коэффициентов, приближение, сходимость, погрешность.

Введение. Дифференцированием называется, как известно, процесс нахождения производной от заданной функции или же её численного значения в заданной точке. Необходимость выполнения дифференцирования возникает весьма часто и вызвана широким распространением этой операции в современной математике и её приложениях. Производная бывает нужна и сама по себе как мгновенная скорость тех или иных процессов и как вспомогательное средство для построения более сложных процедур, например, в методе Ньютона для численного решения уравнений и систем уравнений [1].

В настоящее время наиболее распространены три следующих способа вычисления производных:

- символьное (аналитическое) дифференцирование;
- численное дифференцирование;
- автоматическое (алгоритмическое) дифференцирование.

Символьным (аналитическим) дифференцированием называют процесс построения производной по функции, заданной каким-то выражением, на основе известных из элементарного анализа правил дифференцирования простейших и составных функций (суммы, разности, произведения, частного, композиции, обратной функции и т. п.). На аналогичных принципах основывается автоматическое (алгоритмическое) дифференцирование, но при этом оперируют не выражениями для производных, а их численными значениями при данных значениях аргументов функции. При этом символьное (аналитическое) дифференцирование и автоматическое (алгоритмическое) дифференцирование требуют знания выражения для функции или хотя бы компьютерной программы для её вычисления.

Численным дифференцированием называют процесс нахождения значения производной от функции, использующий значения этой функции в некотором наборе точек её области определения. Решение задачи численного дифференцирования имеет большое значение при обработке результатов измерений параметров движущихся объектов, в геологии при обработке измерений, получаемых в процессе бурения скважин, когда необходимо определить скорость и ускорение, с которыми бур проходит различные по плотности слои грунта; в экологии при решении обратных задач, в численных методах решения скалярных уравнений, когда функция, входящая в уравнение, задана таблично или является слишком сложной для аналитического дифференцирования и во многих других задачах.

В основе численного дифференцирования лежат различные идеи. Первая состоит в том, чтобы доопределить (восстановить) таблично заданную функцию до функции непрерывного аргумента, к которой уже применима обычная операция дифференцирования. При реализации такого подхода полезной оказывается теория интерполирования [2]. В частности, таблично заданную функцию можно заменить её интерполяционным полиномом и его производные считать производными рассматриваемой функции. Для этой процедуры подходит также интерполяция сплайнами или другими функциями. Другим подходом к получению формул численного дифференцирования является метод неопределенных коэффициентов [2], конструктивно более простой и технологичный в применении, особенно удобный в многомерном случае, когда построение интерполяционного полинома становится непростым.

Пусть задан набор узлов $t_0, t_1, \ldots, t_N$ на отрезке $[a,b]$, которые образуют сетку с шагом $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, где $i = 1,2,\ldots,N$, $N > 0$ – заданное число. Пусть известны значения $x_0, x_1, \ldots, x_N$ функции $x(t)$ такие, что $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{0,N}$, т.е. задан дискретный временной ряд. Напомним, что *временным рядом* называют последовательность значений функции $x(t)$ в моменты времени $t \in [a,b]$, другими словами, множество наблюдений, генерируемых последовательно во времени. Если ошибки измерений и возмущения, действующие на систему, не учитываются, то говорят о задачах детерминированного наблюдения и анализа данных. В противном случае возникают различные задачи нахождения производных при наличии ошибок измерений или задачи анализа данных при неполной информации.

Задачу численного дифференцирования временных рядов, допускающих аппроксимацию полиномиальными многочленами, исследовали многие авторы, например [3; 4]. При этом предполагалось, что функция $x(t)$ задана таблицей значений в равноотстоящих узлах $t_0, t_1, \ldots, t_N \in [a,b]$. В работе [4], в частности, предлагается строить интерполяционный многочлен $P_k(t)$ в $(k+1)$ узлах ($k < N$) таким образом, чтобы соблюдалось приближенное равенство

$$x(t) \approx P_k(t), \quad t \in [a,b],$$

и значение m-й производной интерполяционного многочлена $P_k(t)$ принимается за приближенное значение m-й производной функции $x(t)$, т.е.

$$x^{(m)}(t) \approx P_k^{(m)}(t), \quad t \in [a,b], \; m \le k. \tag{1}$$

Для случая равноотстоящих узлов с шагом $\tau = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,N}$, интерполяционный многочлен задают формулой Ньютона [4]:

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Delta^i x(t_0)}{\tau^i \, i!} \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_j), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

где $\Delta^i x(t_0)$ – конечная разность i-го порядка от функции $x(t)$ в точке $t = t_0$. При этом показано, что m-я производная от интерполяционного многочлена (2) в точке $t = t_0$ равна

$$P_k^{(m)}(t_0) = \frac{m!}{\tau^m} \sum_{i=m}^{k} \frac{S_i^{(m)}}{i!} \Delta^i x(t_0), \quad t \in [a,b], \; m \le k, \tag{3}$$

где $S_i^{(m)}$, $m \le i \le k$ – целые числа, называемые числами Стирлинга первого рода. Аналогичными выражениями записываются соответствующие производные от интерполяционного многочлена (2) для любого узла t_j, $j = \overline{0,N}$. Недостатком такого подхода является необходимость вычисления конечных разностей от m-го до k-го порядков в формуле (3). Операция вычисления конечных разностей высокого порядка сопровождается значительными ошибками округления. Эти ошибки существенно возрастают, если временной ряд содержит случайные ошибки измерений.

Посредством дифференцирования интерполяционных формул выводятся формулы для приближенного вычисления производных различного порядка точности, наиболее распространенные из которых можно найти, например, в работах [2; 3].

В [5] поставлена задача отыскания устойчивых относительно ошибок округления формул численного дифференцирования вида

$$\dot{x}(t_n) = \sum_{i=1}^{k} \beta_{k-i} \dot{x}(t_{n-i}) + \tau^{-1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k-i} x(t_{n-i}), \quad k \le n \le N, \; k \in Z^+, \tag{4}$$

где $\beta_{k-i}, \alpha_{k-i}$ – некоторые числовые коэффициенты. Такая задача возникает, когда необходимо вычислять значения производной на основании дискретно поступающей информации о значениях функции. Показана устойчивость формул (4) при любом $k \in Z^+$ и указан наиболее высокий порядок аппроксимации без учета случайных ошибок измерений.

В настоящее время методы численного дифференцирования детерминированных временных рядов исследованы достаточно хорошо. Известны способы повышения точности соответствующих приближенных формул, в том числе способы отыскания оптимального значения шага сетки τ, основанные на методе Рунге-Ромберга-Ричардсона [6]. Тем не менее вопрос отыскания оптимального значения $k \in Z^+$ в формулах (1), (3), (4), обеспечивающего достижение заданной точности $\varepsilon > 0$ вычислений, на сегодня исследован недостаточно.

Кроме того, существенно меньшее внимание по сравнению с детерминированным случаем уделяется решению задачи численного дифференцирования временных рядов, содержащих случайные ошибки измерений. Наиболее значимыми в этом направлении являются работы, позволяющие получить решение такой задачи с помощью аппроксимации экспериментальных данных кубическими сплайнами с последующим аналитическим дифференцированием соответствующей кривой, а также работы, посвященные дифференцированию случайных процессов. Следует особо отметить важность работ по развитию методов регуляризации для задачи дифференцирования, некорректность которой приводит к малой точности расчетных формул из-за погрешности исходных данных.

Постановка задачи. Пусть функция $x(t)$ определена и дифференцируема на $[a,b]$ и известны точные значения $x_j = x(t_j)$, $j=\overline{0,N}$ этой функции в узлах равномерной сетки

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t_j \in [a,b]:\ t_j = a + j\tau,\ j=\overline{0,N} \right\}, \quad \tau = \frac{b-a}{N}, \quad N>0 .$$

Требуется вычислить значение $\dot{x}(t_n)$ производной первого порядка функции $x(t)$ в точке $t_n \in \overline{\omega}_\tau$, используя значения этой функции в некотором наборе точек из $\overline{\omega}_\tau$, а именно требуется найти такую функцию $\Phi(x_n,\ x_{n-1},\dots,x_{n-k})$ и такое наименьшее из чисел $k \ge 1$, для которых будет выполняться неравенство

$$\left| \dot{x}(t_n) - \Phi(x_n, x_{n-1},\dots,x_{n-k}) \right| \le \varepsilon, \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ – наперед заданное малое число, $t_n \in \overline{\omega}_\tau$ $(k \le n \le N)$ [7].

Целью данной работы является исследование на основе метода неопределенных коэффициентов, дающего линейное представление для зависимости $\Phi(x_n, x_{n-1},\dots,x_{n-k})$, вопроса о нахождении наименьшего допустимого количества элементов временного ряда $x_0, x_1,\dots,x_N$, обеспечивающего заданную точность вычислений значений его первой производной, а также разработка программного продукта, позволяющего на классе гладких функций моделировать соответствующую погрешность численного дифференцирования.

Метод решения. Рассмотрим общую схему метода неопределенных коэффициентов численного дифференцирования [2].

Зададим целое $k \ge 1$ и будем искать приближенное выражение для $\dot{x}(t)$ в виде

$$\dot{x}(t) \approx \sum_{i=0}^{k} C_i x(t_{n-i}), \quad t \in [a,b], \tag{6}$$

где $C_i \equiv C_i(t)$, $i=\overline{0,k}$ – пока неизвестные коэффициенты. Обозначим через

$$R_k(t) = \dot{x}(t) - \sum_{i=0}^{k} C_i x(t_{n-i}), \quad t \in [a,b] \tag{7}$$

остаточный член формулы (6) и подберем коэффициенты C_i $(i=\overline{0,k})$ так, чтобы эта формула была точна ($R_k(t) \equiv 0)$ для всех алгебраических многочленов степени не выше k, в частности для элементарных алгебраических многочленов $1, t, t^2,\dots,t^k$. В результате получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно искомых коэффициентов:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + \dots + C_k = 0, \\ t_n C_0 + t_{n-1} C_1 + \dots + t_{n-k} C_k = 1, \\ t_n^2 C_0 + t_{n-1}^2 C_1 + \dots + t_{n-k}^2 C_k = 2t, \\ \dots \\ t_n^k C_0 + t_{n-1}^k C_1 + \dots + t_{n-k}^k C_k = k\, t^{k-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Матрица системы (8) есть матрица Вандермонда, которая неособенна для различных узлов $t_{n-k},\dots,t_{n-1},t_n$. При этом система (8) однозначно разрешима относительно $C_0, C_1,\dots,C_k$ при любой правой части и $k \ge 1$.

СЛАУ (8) с матрицей Вандермонда в общем случае является плохо обусловленной, но на практике её решение обычно не приводит к большим ошибкам, так как порядок системы, равный $(k+1)$, бывает, как правило, небольшим.

Рассмотрим формулу (6) при $t = t_n$ $(k \le n \le N)$:

$$\dot{x}(t_n) \approx \sum_{i=0}^{k} C_i^{(n)} x(t_{n-i}) = \Phi(x_n, x_{n-1},\dots,x_{n-k}), \tag{9}$$

где $C_i^{(n)} = C_i(t_n)$, и потребуем за счет выбора коэффициентов $C_i^{(n)}$ $(i=\overline{0,k})$, чтобы погрешность $R_k(t_n)$ приближенного равенства (9) была величиной порядка $O(\tau^{k+1})$. Если функция $x(t)$ достаточно гладкая на $[a,b]$, можно воспользоваться её разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $t_n \in \overline{\omega}_\tau$. При каждом $t = t_{n-i}$ $(0 \le i \le k)$ будем иметь

$$x(t_{n-i}) = x(t_n - i\tau) = x(t_n) - \dot{x}(t_n)\cdot i\tau + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2!}(i\tau)^2 - \frac{\dddot{x}(t_n)}{3!}(i\tau)^3 + \dots +$$

$$+(-1)^k \frac{x^{(k)}(t_n)}{k!}(i\tau)^k + (-1)^{k+1}\frac{x^{(k+1)}(t_n-\theta i\tau)}{(k+1)!}(i\tau)^{k+1}, \quad 0<\theta<1 .$$

Тогда

$$\Phi(x_n, x_{n-1},\dots,x_{n-k}) = \sum_{i=0}^{k} C_i^{(n)} x(t_{n-i}) = x(t_n)\sum_{i=0}^{k} C_i^{(n)} - \tau\,\dot{x}(t_n)\sum_{i=0}^{k} i\,C_i^{(n)} +$$

$$+\frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t_n)\sum_{i=0}^{k} i^2 C_i^{(n)} - \frac{\tau^3}{3!}\dddot{x}(t_n)\sum_{i=0}^{k} i^3 C_i^{(n)} + \ldots + (-1)^k\frac{\tau^k}{k!}x^{(k)}(t_n)\sum_{i=0}^{k} i^k C_i^{(n)} +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k} x^{(k+1)}(t_n-\theta i\tau) i^{k+1} C_i^{(n)}, \quad 0<\theta<1 .$$

Потребуем выполнения условий

$$\sum_{i=0}^{k} C_i^{(n)} = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} i\,C_i^{(n)} = -\frac{1}{\tau}, \quad \sum_{i=0}^{k} i^2 C_i^{(n)} = 0, \ \ldots, \quad \sum_{i=0}^{k} i^k C_i^{(n)} = 0 . \qquad (10)$$

Эти условия образуют СЛАУ для неопределенных коэффициентов $C_0^{(n)}$, $C_1^{(n)}, \ldots, C_k^{(n)}$. Матрица и вектор правых частей системы (10) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & k \\ 0 & 1 & 2^2 & \ldots & k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2^k & \ldots & k^k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы есть определитель Вандермонда, отличный от нуля. Следовательно, существует единственный набор коэффициентов $C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \ldots, C_k^{(n)}$, а значит, единственная формула вида (9), которая позволяет вычислить на шаблоне из $(k+1)$ точек $t_{n-k}, \ldots, t_{n-1}, t_n$ значение $\dot{x}(t_n)$ первой производной функции $x(t)$ с точностью $O(\tau^{k+1})$.

При этом выражение для погрешности формулы (9) будет иметь вид

$$R_k(t_n) = \dot{x}(t_n) - \Phi(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) = \rho_k(t_n)\cdot\tau^{k+1}, \qquad (11)$$

где

$$\rho_k(t_n) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k} x^{(k+1)}(t_n-\theta i\tau) i^{k+1} C_i^{(n)}, \quad t_n \in \overline{\omega}_\tau, \ n=\overline{k,N} . \qquad (12)$$

Если известна величина $M_{k+1} = \max\limits_{a\le t\le b}\left|x^{(k+1)}(t)\right|$, то для указанных узлов

$$\left|\dot{x}(t_n) - \Phi(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})\right| \le \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k} i^{k+1}\left|C_i^{(n)}\right|\cdot\tau^{k+1}. \qquad (13)$$

При практическом использовании формул численного дифференцирования, особенно когда значения x_j получены из эксперимента, бывает очень трудно оценить величину $x^{(k+1)}(t)$, $t\in[t_{n-k}, t_n]$ в формуле (12). Рассмотрим простой, хотя и очень грубый, способ такой оценки. Предположим, что узлы $t_j \in \overline{\omega}_\tau$ принадлежат малому отрезку и производная $x^{(k+1)}(t)$ на этом отрезке изменяется несущественно. Тогда, привлекая еще одно (дополнительное) табличное значение исходной функции, например $x_{n-k-1} = x(t_{n-k-1})$, мы можем заменить производную $x^{(k+1)}(t)$ для любой точки $t\in[t_{n-k}, t_n]$ конечной разностью $\nabla^{k+1}x_n \approx \tau^{k+1}x^{(k+1)}(t)$ и получить на основании (11), (12) представление

$$R_k(t_n) \approx \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\nabla^{k+1}x_n\sum_{i=0}^{k} i^{k+1}C_i^{(n)}, \quad t_n \in \overline{\omega}_\tau, \ n=\overline{k,N}, \qquad (14)$$

где $\nabla^{k+1}x_n = \Delta^{k+1}x_{n-\kappa-1} = \sum\limits_{j=0}^{k+1}(-1)^j C_{k+1}^j x_{n-j}$, $C_{k+1}^j = \frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}$.

Величина $R_k(t_n)$, как видно из (14), сложно зависит от k, и найти аналитическую зависимость между значением k и заданной точностью вычислений $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось условие (5), которое с учетом (14) приобрело вид

$$\left|\frac{\nabla^{k+1}x_n}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k} i^{k+1}C_i^{(n)}\right| \le \varepsilon\,, \quad t_n \in \overline{\omega}_\tau\,,\ n=\overline{k,N}\,, \tag{15}$$

в общем случае затруднительно. Тем не менее можно предложить некоторые алгоритмы численного анализа и минимизации по k правой части формулы (14) в целях достижения условия (15).

Численный эксперимент и анализ результатов. Для численного анализа погрешности (14) дифференцирования дискретного временного ряда функции $x(t)$ в моменты времени $t_k, t_{k+1},\ldots,t_N \in [a,b]$ был разработан программный продукт, оттестированный на классах гладких функций (полиномиальных, тригонометрических, експоненциальных).

Программа позволяет на основании условия (15) определить в формулах численного дифференцирования (9), (10) наименьшее целое значение $k \ge 1$, гарантирующее достижение заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления значения $\dot{x}(t_n)$ первой производной дискретного временного ряда x_0, $x_1,\ldots,x_N$ в точке $t_n \in \overline{\omega}_\tau$ ($k \le n \le N$), а также значение $\dot{x}(t_n)$ в указанной точке.

Рассмотрим пример использования разработанного программного продукта для оценки скорости движения снаряда по результатам наблюдений.

Дальность полета снаряда в моменты времени t приведена в табл. 1 (три десятичных знака после запятой в исходных данных являются верными), где приняты следующие обозначения: t_i – время полета снаряда, $D(t_i)$ – дальность полета снаряда, зависящая от времени [8].

Таблица 1

Дальность полета снаряда

i	t_i	$D(t_i)$
1	1,0	0.339
2	2,0	1.311
3	3,0	2.857
4	4,0	4.922
5	5,0	7.457
6	6,0	10.417
7	7,0	13.761
8	8,0	17.453
9	9,0	21.460
10	10,0	25.752
11	11,0	30.301
12	12,0	35.084

Пусть необходимо определить скорость $v(t_n)$, $n=5,6,\ldots,9$ движения снаряда в указанные моменты времени t_n посредством численного дифференцирования заданного временного ряда $\{D(t_i),\ i=\overline{1,12}\}$. Решим задачу следующими способами:

1) аналитически, проводя дифференцирование по t известной из теории баллистики зависимости $D(t)=-70+7t+70\cdot e^{-t/10}$ [8];

2) используя классические методы дифференцирования;

3) используя методику, положенную в основу разработанного программного продукта.

Итак, дифференцируя аналитическую зависимость для $D(t)$, будем иметь $\dot{D}(t)=7-7\cdot e^{-t/10}$. Значения скорости движения снаряда в указанные моменты времени найдем, подставляя соответствующие значения t_n.

Для реализации второго способа дифференцирования из-за необходимости оценивания значения производной в темпе с поступлением исходных данных воспользуемся классической формулой левой разностной производной, имеющей первый порядок точности по τ [2]:

$$\dot{D}(t_n) \approx \frac{1}{\tau}\big(D(t_n)-D(t_{n-1})\big).$$

Результаты расчетов на основе упомянутых приёмов дифференцирования приведены в табл.2. Приближенные значения производной $\dot{D}(t_n)$, полученные третьим способом (с использованием изложенной методики), найдены с точностью вычислений $\varepsilon = 10^{-3}$, при этом в последнем столбце таблицы приведено для каждого из указанных моментов времени t_n соответствующее количество k_n привлеченных членов временного ряда $\{D(t_i),\ i=\overline{1,12}\}$, достаточное для достижения точности ε.

Таблица 2

Результаты численных экспериментов

t_n	Аналитический метод	Разностный метод	Предложенная оценка	
			$\dot{D}(t_n)$	k_n
5,0	2,7543	2,535	2,7551	4
6,0	3,1583	2,960	3,1579	3
7,0	3,5239	3,344	3,5223	3
8,0	3,8547	3,692	3,8552	4
9,0	4,1540	4,007	4,1535	3
Среднее значение ошибки		0,1814	0,0008	

Анализ результатов показывает практическую сходимость метода (9), (10), программно реализованного для рассмотренной задачи, а также возможность численного моделирования производной временного ряда на основе метода неопределенных коэффициентов с любой наперед заданной точностью вычислений за счёт привлечения соответствующего количества членов временного ряда.

Выводы. В работе исследован вопрос о нахождении наименьшего допустимого количества элементов детерминированного временного ряда $x_0, x_1, \ldots, x_N$, обеспечивающего заданную точность вычислений значений его первой производной; разработан программный продукт, позволяющий на классе гладких функций моделировать соответствующую погрешность численного дифференцирования; проведен анализ предложенной методики на примере решения конкретной задачи.

Кроме того, рассматривался лишь один из источников погрешности численного дифференцирования – погрешность аппроксимации, которая определяется величиной остаточного члена. Как видно из (14), анализ остаточного члена нетривиален. Отметим лишь, что погрешность аппроксимации при уменьшении шага сетки τ, как правило, уменьшается.

Другой источник погрешности численного дифференцирования связан с погрешностями исходных данных и погрешностями округлений при проведении расчетов на компьютере. Обусловленные этими причинами погрешности, в отличие от погрешности аппроксимации, возрастают с уменьшением шага τ. Для авторов в дальнейшем представляет интерес исследование получившей распространение в последнее время группы методов численного дифференцирования, основанной на идеях регуляризации.

Библиографические ссылки

1. **Шарый, С.П.** Курс вычислительных методов [Текст] /С.П. Шарый. – Новосибирск: Ин-т выч. технологий СО РАН, 2012. – 315 с.
2. **Бахвалов, Н.С.** Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Физматлит, 2001. – 630 с.
3. **Вержбицкий, В.М.** Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) [Текст] / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 266 с.
4. **Мысовских, И.П.** Лекции по методам вычислений [Текст] / И.П. Мысовских. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 345 с.
5. **Зальцер, Дж.М.** Частотный анализ вычислительных машин в реальном времени [Текст] / Дж.М. Зальцер // Частотные методы в автоматике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 396 с.
6. **Пирумов, У.Г.** Численные методы [Текст] / У.Г. Пирумов. – М.: Изд-во МАИ, 1998. – 188 с.
7. **Кунцевич, В.М.** О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений [Текст] / В.М. Кунцевич // Автомат. и телемех. – 2005. – № 5. – С. 125–133.
8. **Гончарова, Е.Н.** Численное дифференцирование временных рядов с использованием фильтра Калмана-Бьюси [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.Н. Гончарова. – Ставрополь, 2004. – 124 с.

Надійшла до редколегії 01.06.2015