УДК 519.6

Л.Л. Гарт
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ЯВНЫЙ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследован вопрос о сходимости общего проекционно-итерационного метода решения некорректных линейных операторных уравнений в нормированных пространствах, основанного на методе простой итерации. Доказана теорема о сходимости, получена оценка погрешности.

Досліджено питання про збіжність загального проекційно-ітераційного методу розв'язання некоректних лінійних операторних рівнянь в нормованих просторах, заснованого на методі простої ітерації. Доведено теорему про збіжність, отримано оцінку похибки.

The problem of convergence of a general projection-iteration method based on the simple iteration method is investigated for solving ill-posed linear operator equations in normal spaces. The convergence theorem is proved, the error estimate is obtained.

Ключевые слова: линейный оператор, уравнение, решение, пространство, аппроксимация, проекционный, проекционно-итерационный, метод, приближение, последовательность, устойчивость, сходимость, погрешность.

Введение. Теория некорректных задач и методов их приближенного решения – активно развивающееся направление математики, имеющее разнообразные приложения во многих областях естествознания, техники и управления. Некорректно поставленные задачи естественным образом возникают в процессе математического моделирования в геофизике, астрофизике, компьютерной томографии, при обработке и интерпретации данных физических экспериментов (см., например, [1-3]). Интенсивное развитие теории некорректных задач во многом обусловлено появлением в последние десятилетия высокопроизводительной вычислительной техники. Как правило, эти задачи формулируются в виде операторных уравнений, задач минимизации функционалов, а также задач вычисления значений неограниченных операторов. Поскольку источником исходных данных на практике нередко служат измерения и эксперименты, операторы получаемых уравнений обычно задаются с той или иной погрешностью.

Значительная часть некорректных задач может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Au = f \tag{1}$$

с заданным оператором A, действующим из X в Y (X, Y – метрические пространства, в отдельных случаях банаховы или гильбертовы), и элементом $f \in Y$.

Основные результаты по некорректным задачам отражены в монографиях М.М. Лаврентьева [4], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [5], В.А. Морозова [6], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [7], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [8]. Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. В 30-е годы в работах Т. Карлемана (T. Carleman), Г.М. Голузина и В.И. Крылова, И.Г. Малкина были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные (оператор A и правая часть f) заданы точно. В работе [4] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. Изучению итерационных методов посвящены работы В.Н. Страхова [9], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [10]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным, В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, В. Липфертом (W. Lipfert), А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским, В.А. Морозовым, В.В. Васиным, С.Ф. Гильязовым и Н.Л. Гольдманом (S.F. Gilyazov and N.L. Gol'dman), применялись для решения многих некорректных задач в банаховых и гильбертовых пространствах. Метод простой итерации при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [1], О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [11].

Большинство перечисленных работ посвящено априорному выбору числа итераций. Это означает, что в предположении об истокопредставимости $u = A^s z$, $s > 0$, $z \in X$ точного решения уравнения (1) находится оценка погрешности метода, которая затем оптимизируется по n, т.е. определяется число итераций $n_{опт}$, при котором эта оценка является минимальной. В отсутствие же сведений об истокопредставимости точного решения итерационные методы решения некорректных задач также можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке или по поправке. Апостериорный выбор числа итераций для метода простой итерации впервые был предложен И.В. Емелиным и М.А. Красносельским [12] и в дальнейшем получил развитие в работах Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенникова, В.Ф. Савчука. Ими обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итеративные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (1), не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, а в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

Помимо итерационных методов для приближенного решения некорректных задач широко применяются проекционные методы, позволяющие (по Л.В. Канторовичу) уравнение (1), рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменить приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве, и принять точное решение приближенного уравнения в качестве приближения к решению исходного уравнения. Установлению критериев сходимости, исследованию быстроты сходимости, получению оценок погрешности, изучению устойчивости вычислительных схем и различным приложениям проекционных методов посвящены фундаментальные работы С.Г. Михлина, Л.В. Канторовича, Н.И. Польского, М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, В.В. Иванова, В.В. Петришина, а также работы Ю.И. Грибанова, Б.Г. Габдулхаева, А.Ю. Лучки, С.Д. Балашовой и других авторов. При этом привлечение идей функционального анализа дало возможность выработать единый подход к решению самых разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют свои недостатки. Хотя приближенные уравнения и проще исходного, тем не менее, получение их точных решений практически затруднительно, а иногда просто нецелесообразно (из-за погрешностей задания исходных данных). Сложным является также вопрос о выборе порядка приближенного уравнения, который обеспечил бы получение решения с заданной точностью. Если решение приближенного уравнения некоторого порядка n не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать уравнение более высокого порядка, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Попытки устранения перечисленных недостатков привели к возникновению группы методов под названием проекционно-итерационные, которые основаны на возможности применения итерационных методов для приближенного решения приближенных уравнений. Так, согласно идее С.Д. Балашовой [13], реализованной для корректно поставленных задач, для каждого из приближенных уравнений (n-го уравнения) следует находить итерационным методом лишь несколько (k_n) приближений, последнее из которых полагать равным начальному приближению к решению следующего (($n+1$)-го) уравнения. Такой подход естественно устраняет трудности, возникающие при решении исходного уравнения обычным проекционным методом. Кроме того, применение итерационных методов не к исходному уравнению, а к более простым приближенным уравнениям позволяет наиболее просто строить последовательность приближений к решению, а также облегчает задачу о выборе начального приближения.

В данной работе в рамках общей методологии [13] впервые исследован проекционно-итерационный метод решения некорректного линейного операторного уравнения (1) в гильбертовом пространстве, основанный на методе простой итерации.

Постановка задачи. Пусть задано уравнение (1)

$$Au = f ,$$

где A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u,v) произвольных элементов $u,v \in H$ и порождаемой им нормой $\|u\| = \sqrt{(u,u)},\ u \in H$. Предположим, что обратный оператор A^{-1} существует, но не является ограниченным в H, т.е. не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость) [5]. Будем обозначать через $u^* \in H$ точное решение уравнения (1).

Целью данной работы является теоретическое обоснование проекционно-итерационного подхода к решению некорректных линейных операторных уравнений вида (1), а именно получение достаточных условий сходимости явного проекционно-итерационного метода в гильбертовом пространстве, оценок его погрешности и скорости сходимости.

Проекционный метод. Наряду с уравнением (1) рассмотрим последовательность приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n , \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

где A_n – линейный ограниченный оператор в H_n; $\{H_n\}$ – возрастающая последовательность конечномерных подпространств исходного пространства H ($H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots \subset H$, $H_1 \neq \varnothing$), $f_n = P_n f$, P_n – оператор ортогонального проектирования H на H_n ($P_n^2 = P_n$, $P_n^* = P_n$, $\|P_n\| = 1$).

Введенные пространства и операторы при каждом натуральном $n \in N$ свяжем условиями близости:

– для любого $u_n \in H_n$

$$\|A_n u_n - P_n A u_n\| \le \alpha_n \|u_n\|; \tag{3}$$

– для любого $u_n \in H_n$ существует элемент $z_n \in H_n$ такой, что

$$\|A u_n - z_n\| \le \beta_n \|u_n\|; \tag{4}$$

– для любого $f \in H$

$$\|P_n f - f\| \le \eta_n \|f\|, \tag{5}$$

где $\alpha_n, \beta_n, \eta_n$ – положительные числа, не зависящие от $u_n \in H_n$ и $f \in H$ соответственно, причем $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $N(A)$ подпространство нулей оператора A, т.е.

$$N(A) = \{u \in H: \ Au = 0\},$$

через $\overline{H} = H \setminus N(A)$ – фактор-пространство пространства H по подпространству нулей $N(A)$ оператора A, а через $\overline{A}$ – линейный оператор из $\overline{H}$ в H, индуцированный оператором A в фактор-пространстве $\overline{H}$ [14].

Теорема 1 *(о сходимости проекционного метода). Пусть уравнение (1) разрешимо при любой правой части $f \in H$ и выполнены условия близости (3)-(5). Тогда при всех $n \ge N \ge 1$, удовлетворяющих неравенству*

$$\rho_n = \|\overline{A}^{-1}\| \left(\alpha_n + \beta_n \|E - P_n\|\right) < 1, \tag{6}$$

приближенное уравнение (2) также разрешимо при любой правой части $f_n \in H_n$ и последовательность точных решений $u_n^* \in H_n$ приближенных уравнений (2) сходится к точному решению $u^* \in H$ уравнения (1) по норме пространства H с оценкой погрешности

$$\|u_n^* - u^*\| \le \gamma_n, \quad n \ge N, \tag{7}$$

где $\gamma_n = 2\|\overline{A}^{-1}\| \|f - A u_n^*\| = O\left(\eta_n + \alpha_n + \beta_n \|E - P_n\|\right)$; E – единичный оператор в H, $E - P_n : Y \to H$, $Y = \{y \in H: \ y = Au_n - f_n, \ u_n, f_n \in H_n\}$.

Доказательство теоремы 1 проводится с использованием следствия из теоремы 7.1 книги [15].

Во многих прикладных исследованиях типичной является ситуация с заданием исходных данных с погрешностью. Эту общую ситуацию промоделируем предположением, что правая часть уравнения (1) задана с погрешностью δ, т.е. вместо $f \in H$ нам известно $f_\delta \in H$ такое, что

$$\|f - f_\delta\| \le \delta. \tag{8}$$

(В более общем случае следует ориентироваться на задачи (1), в которых приближенно задана не только правая часть f, но и оператор задачи A.) Требуется по $f_\delta \in H$ построить приближенное решение $u_\delta \in H$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u_\delta \to u^*$ при $\delta \to 0$.

Метод решения. Для приближенного решения задачи (1) при условии (8) аппроксимируем уравнение

$$Au = f_\delta \tag{9}$$

так же, как и раньше, последовательностью приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n(\delta), \quad n \ge N, \tag{10}$$

где A_n – линейный ограниченный оператор в конечномерном подпространстве $H_n \subset H$, $f_n(\delta) = P_n f_\delta$. Так как P_n – оператор ортогонального проектирования H на H_n, то отклонение правых частей приближенных уравнений (2) и (10) по норме пространства H не превосходит погрешности δ задания правой части уравнения (1):

$$\|f_n - f_n(\delta)\| = \|P_n f - P_n f_\delta\| \le \|P_n\| \|f - f_\delta\| \le \delta, \quad n \ge N. \tag{11}$$

Согласно теореме 1 из разрешимости уравнения (1) при любой правой части и выполнимости условий (3)-(5) следует разрешимость каждого из приближенных уравнений (10), причем последовательность точных решений $u_n^*(\delta)\in H_n$ приближенных уравнений (10) сходится к точному решению $u_\delta^*\in H$ уравнения (9) с оценкой погрешности

$$\left\|u_n^*(\delta)-u_\delta^*\right\|\le\gamma_n(\delta)=2\left\|\bar{A}^{-1}\right\|\left\|f_\delta-Au_n^*(\delta)\right\|,\quad n\ge N.$$

Предположим, что каждый из линейных операторов A_n положителен (а значит, самосопряжен) в $H_n\subset H$ и область его определения $D(A_n)$ плотна в H_n. Некорректность приближенных уравнений (10) связана с тем, что собственные значения оператора A_n, упорядоченные по убыванию ($\lambda_n^{(1)}\ge\lambda_n^{(2)}\ge\ldots\ge\lambda_n^{(i_n)}>0$, $i_n=dim H_n$), стремятся к нулю. Будем считать, что соответствующая система собственных функций $\left\{\varphi_n^{(i)}\right\}\subset D(A_n)$, $i=1,2,\ldots,i_n$ оператора A_n ортонормирована и полна в H_n, так что для любого элемента $v_n\in H_n$ справедливо разложение $v_n=\sum_{i=1}^{i_n}C_n^{(i)}\varphi_n^{(i)}$, где $C_n^{(i)}=(v_n,\varphi_n^{(i)})$ – коэффициенты Фурье элемента v_n.

Для решения каждого из приближенных уравнений (10) будем применять явный двухслойный итерационный метод (метод простой итерации)

$$u_n^{(k+1)}=u_n^{(k)}-\tau_n(A_n u_n^{(k)}-f_n(\delta)),\quad k=0,1,\ldots,\quad n\ge N, \tag{12}$$

где $u_n^{(k)}\equiv u_n^{(k)}(\delta)\in H_n$ – k-е итерационное приближение к точному решению $u_n^*(\delta)\in H_n$ уравнения (10); $\tau_n>0$ – итерационный параметр, постоянный при данном n.

Если в приближенном уравнении (10) оператор A_n не является самосопряженным и положительным, то можно провести предварительную симметризацию по Гауссу и применить итерационный метод (12) к симметризованному уравнению $A_n^*A_nu_n=A_n^*f_n(\delta)$ с положительным в H_n линейным оператором $A_n^*A_n$, где A_n^* – сопряженный оператор по отношению к A_n. Соответствующую итерационную формулу

$$u_n^{(k+1)}=u_n^{(k)}-\tau_n(A_n^*A_n u_n^{(k)}-A_n^*f_n(\delta)),\quad k=0,1,\ldots,\quad n\ge N$$

в зависимости от контекста можно интерпретировать как итерационный метод решения вариационной задачи минимизации функционала невязки $J_n(u_n)=\left\|A_nu_n-f_n(\delta)\right\|^2$.

Отметим также, что в случае положительности исходного оператора A в H свойство положительности каждого из операторов A_n в H_n, начиная с некоторого номера $n\ge N_1\ge 1$, будет немедленно вытекать из выполнимости условия близости (3) и условия $\left\|Au-P_nAu\right\|\le\alpha_n'\left\|u\right\|$, $\forall u\in H$, где $\alpha_n'\to 0$ при $n\to\infty$ [13].

Как известно [1], итерационный метод (12) для уравнения (10) сходится в H_n при всех значениях

$$0<\tau_n<\frac{2}{\lambda_n^{(1)}}, \tag{13}$$

где $\lambda_n^{(1)}>0$ – наибольшее собственное значение оператора A_n, однако из-за близости к нулю нижней границы спектра оператора A_n сложно конкретизировать скорость такой сходимости. Кроме того, при итерационном решении каждого из некорректных уравнений (10) с учетом неточного задания правой части (оценка (11)) следует выбирать условие окончания итераций, согласуясь с этим уровнем погрешности, т.е. продолжать итерации до некоторого номера $k(\delta)$.

Рассмотрим проекционно-итерационный принцип решения задачи (1) при условии (8), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (10), начиная с номера $n\ge N$, итерационного метода (12), (13). Построив с помощью этого метода для n-го приближенного уравнения несколько приближений $u_n^{(k)}\in H_n$, $k=1,2,\ldots,k_n$ $(k_n\le k(\delta))$ и положив последнее из них равным начальному приближению для следующего, $(n+1)$-го уравнения, получим последовательность $\left\{u_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$ приближений к решению $u^*\in H$ уравнения (1):

$$u_n^{(k+1)}=u_n^{(k)}-\tau_n(A_n u_n^{(k)}-f_n(\delta)),\quad k=0,1,\ldots,k_n-1; \tag{14}$$

$$u_{n+1}^{(0)}=u_n^{(k_n)},\quad n\ge N;\quad u_N^{(0)}\in H_N. \tag{15}$$

Здесь $u_n^{(k)}\equiv u_n^{(k)}(\delta)\in H_n$ для всех $k=0,1,\ldots,k_n$, $\tau_n\in(0,2/\lambda_n^{(1)})$, $n\ge N$.

Достаточные условия сходимости последовательности $\left\{u_n^{(k_n)}(\delta)\right\}_{n=N}^{\infty}$ к u^* в H устанавливает следующая теорема.

Теорема 2 *(о сходимости проекционно-итерационного метода). Пусть выполнены условия теоремы 1 и в проекционно-итерационном методе (13)-(15) число итераций* $k_n\le k(\delta)$ *при каждом* $n\ge N$, *причем*

$k(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда последовательность $\left\{u_n^{(k_n)}(\delta)\right\}_{n=N}^{\infty}$, определяемая по формулам (13)-(15), сходится в H к решению u^* задачи (1) при условии (8), если $\delta \to 0$, и справедлива оценка погрешности

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u^* \right\| \le \chi_n(\delta), \quad n \ge N, \tag{16}$$

где $\chi_n(\delta) = \mu'_n \left\| z_N^{(0)} \right\| + \mu''_n + k_n \tau_n \delta + \gamma_n$; γ_n *дается формулой (7),* $\mu'_n = \prod_{j=N}^{n} q_j^{k_j}$,

$\mu''_n = \sum_{i=N}^{n-1} (k_i \tau_i \delta + \gamma_i + \gamma_{i+1}) \prod_{j=i+1}^{n} q_j^{k_j}$, $0 < q_j < 1$, $z_N^{(0)} = u_N^{(0)} - u_N^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим при $n \ge N$ неравенство

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u^* \right\| \le \left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^* \right\| + \left\| u_n^* - u^* \right\|, \tag{17}$$

где $u_n^* \in H_n$ – точное решение приближенной задачи (2), (11). Для второго слагаемого в (17) имеем оценку (7). Оценим первое слагаемое.

Обозначим через $z_n^{(k)} = u_n^{(k)} - u_n^*$, $u_n^{(k)} \equiv u_n^{(k)}(\delta)$ ($k = 0,1,\ldots,k_n$, $n \ge N$) погрешность итерационного метода (12), (13) для задачи (2), (11) на k-й итерации.

Из (14) непосредственно получаем

$$u_n^{(k_n)} = (E - \tau_n A_n)^{k_n} u_n^{(0)} + \tau_n f_n(\delta) \sum_{k=0}^{k_n-1} (E - \tau_n A_n)^k, \quad n \ge N, \tag{18}$$

где $u_n^{(0)} \in H_n$ – заданное начальное приближение, определяемое формулами (15).

Для точного решения $u_n^* \in H_n$ можно воспользоваться аналогичным представлением

$$u_n^* = (E - \tau_n A_n)^{k_n} u_n^* + \tau_n f_n(\delta) \sum_{k=0}^{k_n-1} (E - \tau_n A_n)^k, \quad n \ge N,$$

которое соответствует итерационному решению уравнения (2), когда начальное приближение совпадает с его точным решением.

С учетом (18) для погрешности $z_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)} - u_n^*$ получим выражение

$$z_n^{(k_n)} = r_n^{(k_n)} + w_n^{(k_n)}, \quad n \ge N, \tag{19}$$

где

$$r_n^{(k_n)} = (E - \tau_n A_n)^{k_n} z_n^{(0)}, \quad w_n^{(k_n)} = \tau_n (f_n(\delta) - f_n) \sum_{k=0}^{k_n-1} (E - \tau_n A_n)^k. \tag{20}$$

Первое слагаемое в (19) является стандартным для проекционно-итерационных методов, второе же слагаемое связано с учетом погрешности в задании правой части уравнения (2).

При сформулированных ограничениях (13) на итерационный параметр τ_n для ограниченного и положительного оператора A_n в H_n имеем [1]

$$q_n = \left\| E - \tau_n A_n \right\| < 1, \quad n \ge N. \tag{21}$$

Принимая во внимание (11) и (21), получим оценку

$$\left\| w_n^{(k_n)} \right\| \le \tau_n \left\| f_n(\delta) - f_n \right\| \sum_{k=0}^{k_n-1} \left\| E - \tau_n A_n \right\|^k \le \tau_n k_n \delta, \quad n \ge N. \tag{22}$$

Далее, поскольку начальная погрешность метода для задачи (2) с учетом (15) представима в виде $z_n^{(0)} = u_n^{(0)} - u_n^* = u_{n-1}^{(k_{n-1})} - u_n^*$, то

$$\left\| z_n^{(0)} \right\| \le \left\| z_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \left\| u_{n-1}^* - u^* \right\| + \left\| u^* - u_n^* \right\| \le \left\| z_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n, \quad n > N,$$

и для $r_n^{(k_n)}$ на основании (19)-(22) будем иметь рекурсивное неравенство

$$\left\| r_n^{(k_n)} \right\| \le \left\| E - \tau_n A_n \right\|^{k_n} \left\| z_n^{(0)} \right\| \le q_n^{k_n} \left(\left\| z_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) \le$$

$$\le q_n^{k_n} \left(\left\| r_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \left\| w_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) \le q_n^{k_n} \left(\left\| r_{n-1}^{(k_{n-1})} \right\| + \tau_{n-1} k_{n-1} \delta + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right).$$

Пользуясь этим неравенством, получим

$$\left\| r_n^{(k_n)} \right\| \le \left\| r_N^{(k_N)} \right\| \prod_{j=N+1}^{n} q_j^{k_j} + \sum_{i=N}^{n-1} (k_i \tau_i \delta + \gamma_i + \gamma_{i+1}) \prod_{j=i+1}^{n} q_j^{k_j}, \quad n > N,$$

а поскольку

$$\left\| r_N^{(k_N)} \right\| \le \left\| E - \tau_N A_N \right\|^{k_N} \left\| z_N^{(0)} \right\| \le q_N^{k_N} \left\| z_N^{(0)} \right\|,$$

то окончательная оценка для $r_n^{(k_n)}$ примет вид

$$\left\| r_n^{(k_n)} \right\| \le \left\| z_N^{(0)} \right\| \prod_{j=N}^{n} q_j^{k_j} + \sum_{i=N}^{n-1} (k_i \tau_i \delta + \gamma_i + \gamma_{i+1}) \prod_{j=i+1}^{n} q_j^{k_j}, \quad n \ge N. \qquad (23)$$

Возвращаясь к неравенству (17), можно воспользоваться для оценки первого слагаемого соотношением (19), так что

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^* \right\| = \left\| z_n^{(k_n)} \right\| \le \left\| r_n^{(k_n)} \right\| + \left\| w_n^{(k_n)} \right\|, \quad n \ge N, \qquad (24)$$

и с учетом (22), (23) прийти к требуемой оценке погрешности (16).

Из оценки (16) видно, при $n \to \infty$ и $\delta \to 0$ проекционно-итерационная последовательность приближений $\left\{ u_n^{(k_n)}(\delta) \right\}_{n=N}^{\infty}$ сходится к решению $u*$ задачи (1) при условии (8) по норме пространства H.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы о сходимости проекционно-итерационного метода следует, что сходимость последовательности $\left\{ u_n^{(k_n)}(\delta) \right\}_{n=N}^{\infty}$ κ $u*$, если $\delta \to 0$, имеет место при произвольном выборе чисел k_n, в частности, все числа k_n могут быть равными 1. Следует, однако, иметь в виду, что с возрастанием n увеличивается объем вычислительной работы, необходимой для нахождения очередного приближения. Поэтому нужно стремиться к тому, чтобы за счет подходящего выбора k_n по возможности максимально приблизиться к искомому решению при данном n и только после этого переходить к уравнению более высокой размерности. С другой стороны, не следует выбирать число k_n при данном n слишком большим, поскольку, начиная с некоторого момента, увеличение этого числа не приводит к существенному улучшению (по отношению к решению $u*$ исходного уравнения) очередных приближений. Таким образом, возникает вопрос о целесообразном выборе чисел k_n ($n \ge N$), ответ на который в общем случае затруднителен, однако могут быть даны некоторые рекомендации.

Воспользуемся разложением элемента $r_n^{(k_n)} \in H_n$, определяемого формулой (20), по собственным функциям оператора A_n:

$$r_n^{(k_n)} = \sum_{i=1}^{i_n} C_n^{(i)} (E - \tau_n A_n)^{k_n} \varphi_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{i_n} C_n^{(i)} (1 - \tau_n \lambda_n^{(i)})^{k_n} \varphi_n^{(i)},$$

где $C_n^{(i)} = (z_n^{(0)}, \varphi_n^{(i)})$ – коэффициенты Фурье элемента $z_n^{(0)} \in H_n$. При этом выполняется равенство Парсеваля [14]

$$\left\| r_n^{(k_n)} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{i_n} (C_n^{(i)})^2 (1 - \tau_n \lambda_n^{(i)})^{2k_n}, \quad n \ge N,$$

из которого с учетом $\left| 1 - \tau_n \lambda_n^{(i)} \right| < 1, \ i = 1, 2, \ldots, i_n$ (как впрочем, и из (23)) вытекает, что $\left\| r_n^{(k_n)} \right\| \to 0$ при $k_n \to \infty$.

Подстановка формул (24), (22) и (7) в (17) приводит нас к оценке

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u* \right\| \le \left\| r_n^{(k_n)} \right\| + k_n \tau_n \delta + \gamma_n, \quad n \ge N. \qquad (25)$$

Эта оценка показывает, что в случае применения проекционно-итерационного метода (13)-(15) к решению задачи (1), (8) в качестве параметра регуляризации выступает число итераций k_n, которое следует согласовывать как с погрешностью δ в задании правой части, так и с погрешностью γ_n проекционного метода. Первое слагаемое в правой части неравенства (25) стремится к нулю при $k_n \to \infty$, второе – растет с числом итераций, третье же не зависит от k_n. Ясно, что число k_n достаточно выбрать таким, чтобы величины $\left\| r_n^{(k_n)} \right\|$, $k_n \tau_n \delta$ и γ_n имели один и тот же порядок малости, в частности, роль k_n может играть наименьшее из чисел k ($k = 0, 1, \ldots$), удовлетворяющих неравенству

$$\left\| r_n^{(k)} \right\| \le M (k \tau_n \delta + \gamma_n), \quad n \ge N, \qquad (26)$$

где $M > 0$ – некоторая константа.

Следует отметить, что способом (26) определения чисел k_n можно пользоваться лишь в тех случаях, когда используемые здесь величины, входящие в оценку погрешности (25), легко вычисляются, что не всегда имеет место при решении практических задач.

Другой способ выбора чисел k_n $(n \geq N)$ по аналогии с [13] заключается в выборе k_n таким образом, чтобы элемент $u_n^{(k_n)} \in H_n$ был хорошим начальным приближением для $(n+1)$-го приближенного уравнения (10), иными словами, чтобы невязка $\sigma_{n+1}^{(0)} = A_{n+1}u_{n+1}^{(0)} - f_{n+1}(\delta)$ принимала по возможности малое значение. Рассмотрим оценку

$$\left\|\sigma_{n+1}^{(0)}\right\| \leq \left\|\sigma_n^{(k_n)}\right\| + \left\|A_{n+1}u_{n+1}^{(0)} - A_n u_n^{(k_n)}\right\| + \left\|f_{n+1}(\delta) - f_n(\delta)\right\| = \left\|\sigma_n^{(k_n)}\right\| + \theta_n .$$

Поскольку $\left\|\sigma_n^{(k_n)}\right\| \to 0$ при $k_n \to \infty$, то порядок $\left\|\sigma_{n+1}^{(0)}\right\|$ при данном n определяется величиной θ_n. Поэтому число k_n достаточно выбрать таким, чтобы $\left\|\sigma_n^{(k_n)}\right\|$ и θ_n имели один и тот же порядок малости, в частности, роль k_n может играть наименьшее из чисел k, удовлетворяющих неравенству

$$\left\|\sigma_n^{(k)}\right\| \leq M\,\theta_n, \quad n \geq N, \tag{27}$$

где $M > 0$ – некоторая константа.

Отметим также, что при решении последовательности уравнений (10) вовсе не обязательно перебирать все номера $n = N, N+1, \ldots$ подряд, т.е от n-го приближенного уравнения (10) можно переходить к уравнению с номером $n+m$, где $m \geq 1$. Для определения m поступаем следующим образом. Находим число k_n способом (27), из которого вытекает, что

$$\left\|\sigma_{n+1}^{(0)}\right\| \leq (M+1)\theta_n .$$

А поскольку среди величин $\left\|\sigma_{n+j}^{(0)}\right\|$, $\sigma_{n+j}^{(0)} = A_{n+j}u_{n+1}^{(0)} - f_{n+j}(\delta)$, $j > 1$ могут оказаться величины, удовлетворяющие аналогичному условию

$$\left\|\sigma_{n+j}^{(0)}\right\| \leq (M+1)\theta_n , \tag{28}$$

то в качестве m можно выбрать максимальное из чисел $j > 1$, для которых выполнено (28).

В заключение отметим, что метод простой итерации (12), (13) для решения некорректных уравнений (10), когда отношение $\lambda_n^{(1)} / \lambda_n^{(i_n)}$ наибольшего и наименьшего собственных значений оператора A_n велико, является медленно сходящимся методом. Проекционно-итерационный подход позволяет ускорить сходимость процесса итерационных приближений к решению исходной задачи (1), (8) и тем самым уменьшить количество вычислительных затрат, так как значительная часть этих приближений строится для приближенных уравнений (10) невысокой размерности при неизменной погрешности δ их правых частей.

Кроме того, ускорить сходимость итерационных методов при решении приближенных уравнений (10) можно, во-первых, за счет применения неявных итерационных методов и, во-вторых, оставаясь в классе явных методов, за счет выбора итерационного параметра τ_n зависящим от номера итерации. Используются также неявные итерационные методы с переменными итерационными параметрами.

Выводы. В данной работе впервые рассмотрен вопрос теоретического обоснования явного проекционно-итерационного метода решения некорректного линейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве, основанного на методе простой итерации. Доказана теорема о сходимости, получена оценка погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего количества итераций при решении каждого из приближенных уравнений, рассматриваемых в конечномерных подпространствах исходного пространства.

Библиографические ссылки

1. **Самарский, А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
2. Алгоритмический анализ неустойчивых задач: [Текст] тез. докл. междунар. конф., посвящен. памяти В.К. Иванова. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. – 306 с.
3. **Матысик, О.В.** Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач [Текст] / О.В. Матысик. – Брест: Изд-во БрГУ, 2014. – 213 с.
4. **Лаврентьев, М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
5. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
6. **Морозов, В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач [Текст] / В.А. Морозов. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 320 с.
7. **Иванов, В.К.** Теория линейных некорректных задач и её приложения [Текст] / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
8. **Вайникко, Г.М.** Итерационные процедуры в некорректных задачах [Текст] / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.

9. **Страхов, В.Н.** К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации [Текст] / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.
10. Приближённое решение операторных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
11. **Константинова, Я.В.** Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода [Текст] / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
12. **Емелин, И.В.** К теории некорректных задач [Текст] / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
13. **Балашова, С.Д.** Приближенные методы решения операторных уравнений [Текст] / С.Д. Балашова. – Д.: ДГУ, 1980. – 112 с.
14. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 816 с.
15. **Габдулхаев, Б.Г.** Теория приближенных методов решения операторных уравнений [Текст] / Б.Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2006. – 112 с.

Надійшла до редколегії 01.04.2015