УДК 512

В. Я. Бурдюк
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

РАЦІОНАЛЬНІ ГРУПИ ЯК ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

Досліджено векторні простори, де раціональні числа є скалярами, а раціональні групи – остовами простору.

Дано введение в теорию векторных пространств, где скалярами есть рациональные числа, а векторами – элементы рациональных групп.

This is an introduction to the theory of vector spaces with only rational numbers as scalars and only elements of rational groups as vectors.

Ключові слова: раціональна група, векторний простір, скаляри.

Вступ. Теорія векторних (лінійних) просторів є досить розвинена і її вивчають студенти [1], [2]. Але існує багато версій цієї теорії [3]. За версією Г. Біркхофа [4], кожне поле G, яке є розширенням поля F, можна розглядати як векторний простір над полем F, тобто брати абелеву групу поля G і так визначати множення скалярів – елементів поля F на елементи цієї абелевої групи, щоб виконувались класичні аксіоми векторного простору. У цій версії скаляри є одночасно елементами групи із поля G, адже $F \subseteq G$, а тому відмінність скалярів від елементів групи не є прозора. А чи можна скаляри і вектори суттєво розвести по різні боки абстрагування у разі означення векторного простору? Д. Райков [5] дає позитивну відповідь; ми ж обираємо скалярами лише раціональні числа, а векторами – елементи абстрактних раціональних груп.

Постановка задачі. *Абелева група* G, в якій визначено множення раціональних чисел на її елементи, але за законами чисел, є *раціональною групою* G_{rat}. Абелева група – це множина G, на елементах $a,b,c,\ldots$ якої визначені**:** бінарна дія додавання, одинарна дія переорієнтації елементів $a \in G$ на протилежні $-a$, нульарна дія фіксації *нуля* $0_\bullet \in G$, причому $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a+b=b+a$, $a+0_\bullet = a$, $a+(-a)=0_\bullet$. Говорять ще й про дію *віднімання* $a-b=a+(-b)$, за якою $a-a=0_\bullet$. Визначаємо *раціональну групу* G_{rat}, визначивши в абелевій групі три дії:

1) *множення* цілих чисел на її лементи: $0a=0_\bullet$; $\forall n \ge 0$ $(-n)a = \;= n(-a) = -na$; тож $1a=a$, $(-1)a=-1a=-a$, $2a=a+a$, $3a=2a+a,\ldots$;

2) *ділення* її елементів на $n \ge 2$ однакових частин:

$\forall a\, \forall n \ge 2\, \exists b\ (a=nb)$, тож говоримо про *поділ* елемента a на $n \ge 2$ однакових частин b, тобто $b = a/n = \frac{1}{n}a$, а щоб уникнути можливість поділу нуля $0_\bullet \in G$ на $n \ge 2$ однакових ненульових частин b, визначаємо**:** $n \ge 2 \wedge nb = 0_\bullet \Rightarrow b = 0_\bullet$;

3) *множення* раціональних чисел на її елементи: $(\frac{m}{n}a = m(\frac{1}{n}a) \wedge \;\wedge (-\frac{m}{n})a = -m(\frac{1}{n}a))$.

Між іншим, *групою без скруту* називають абелеву групу G, для якої виконується $n \ge 0 \wedge nb = 0_\bullet \Rightarrow n = 0 \vee b = 0_\bullet$, тож група G_{rat} є групою без скруту. Для груп без скруту виконується $n > 0 \wedge b \ne 0_\bullet \Rightarrow nb \ne 0_\bullet$, а тому додаванням $b+\ldots+b$ ненульовий елемент b не «скручується» в нуль групи, а багатоелементні групи без скруту є нескінченні.

Задача. Дослідити векторні простори, де раціональні числа є скалярами, а раціональні групи – остовами простору.

Метод розв'язання

1. Деякі властивості раціональних груп.

Лема 1. Для $n, m \ge 0$ та $a \in G_{rat}$ виконується**:** 1) $(n+m)a = na+ma$; 2) $n(ma) = (nm)a$.

Доведення. Проведемо індукцію по параметру n. Для $n=0$ лема очевидна. Нехай 1) та 2) виконуються.
Тоді: $((n+1)+m)a = ((n+m)+1)a =$

$=(n+m)a+a=na+ma+a=(na+a)+ma=(n+1)a+ma,$ тож 1) виконується; аналогічно, $(n+1)(ma)=n(ma)+ma=(nm)a+ma==(nm+m)a=((n+1)m)a,$ тож 2) виконується. !!!

Лема 2. Якщо $a,b,c,d\in G_{rat},$ то: 1) $n(a+b)=na+nb$ для $n\geq 0$; 2) $nc=nd\Rightarrow c=d$ для $n\geq 2.$

Доведення. Проведемо індукцію по параметру $n.$ Для $n=0$ формула 1) є очевидна; припустивши, що вона взагалі виконується, отримаємо: $(n+1)(a+b)=n(a+b)+(a+b)=na+nb+a+b=$
$=(na+a)+(nb+b)=(n+1)a+(n+1)b,$ тож формула 1) виконується. Нехай тепер $nc=nd,$ а отже, $0_{\bullet}=nc-nd=nc+n(-d)=$
$=n(c+(-d))=n(c-d).$ Але ж $n\geq 2,$ а тому $c-d=0_{\bullet},$ тож $c=d.$!!!

Лема 3. Якщо $n,m\geq 2$ та $a,b\in G_{rat},$ то: 1) $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)a=\frac{1}{n}a+\frac{1}{m}a;$
2) $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}a\right)=\left(\frac{1}{n}\frac{1}{m}\right)a;$ 3) $\frac{1}{n}(a+b)=\frac{1}{n}a+\frac{1}{n}b.$

Доведення: 1) Маємо $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)a=\left((n+m)\frac{1}{nm}\right)a=(n+m)\left(\frac{1}{nm}a\right)=$
$n\left(\frac{1}{nm}a\right)+m\left(\frac{1}{nm}a\right)=\left(n\frac{1}{nm}\right)a+\left(m\frac{1}{nm}\right)a=\frac{1}{m}a+\frac{1}{n}a=\frac{1}{n}a+\frac{1}{m}a.$

2) Нехай $\frac{1}{m}a=b,\ \frac{1}{n}b=c,$ тож $c=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}a\right).$ Тоді $a=mb,\ b=nc$ і тому $a=m(nc)=(mn)c,$ а також $c=\frac{1}{mn}a=\left(\frac{1}{n}\frac{1}{m}\right)a.$ Отже, маємо формулу 2).

3) Нехай $c=\frac{1}{n}(a+b),\quad c_1=\frac{1}{n}a,\quad c_2=\frac{1}{n}b.$ Тоді $a+b=nc,\quad a=nc_1,\quad b=nc_2,$ а тому $nc=a+b=nc_1+nc_2=n(c_1+c_2)=n\left(\frac{1}{n}a+\frac{1}{n}b\right).$ Звідси, скориставшись формулою 2) із леми 2, отримуємо $c=\frac{1}{n}a+\frac{1}{n}b.$!!!

Із лем 1, 2 та 3 безпосередньо випливає, що множення раціональних чисел на елементи групи G_{rat} відбувається за законами чисел.

Теорема 1. Для раціональних p,q та $a,b\in G_{rat}$ виконується:
1) $(p+q)a=pa+qa;$ 2) $p(qa)=(pq)a;$ 3) $p(a+b)=pa+pb.$

2. Означення простору V_{rat}.

У векторних просторах V взагалі визначають асоціативне та комутативне додавання векторів (елементів простору), а також множення скалярів (чисел) на вектори для утворення векторів. *Раціональний векторний простір* V_{rat} – це група $G_{rat},$ тож кожен елемент групи є вектором простору, а інших векторів простір V_{rat} не має, так що нуль групи є *нуль-вектором* простору; скалярами у просторі V_{rat} можуть бути лише раціональні числа. Простір V_{rat}, що має лише нуль-вектор, називаємо 0-простором. Якщо векторами простору V_{rat} є лише qb для деякого ненульового елемента $b\in G_{rat}$ та всіх раціональних q, то V_{rat} називаємо 1-простором. Якщо для векторів $b,e_1,\ldots,e_m$ простору V_{rat} виконується $b=q_1e_1+\ldots+q_me_m$, то говорять, що вектор b є *лінійно залежний* від векторів $e_1,\ldots,e_m$ і що вектор b є *лінійною комбінацією* векторів $e_1,\ldots,e_m$. Багатовекторну підмножину $A\subset V_{rat}$ таку, що для кожних двох або більше її векторів $e_1,\ldots,e_m$ виконується формула

$$q_1e_1+\ldots+q_me_m=0_{\bullet}\Rightarrow q_1=\ldots=q_m=0, \qquad (1)$$

називаємо *незалежною системою векторів*. Зрозуміло, що: 1) у жодному 1-просторі не існує незалежних систем векторів; 2) кожна багатовекторна підсистема незалежної системи векторів є незалежною системою, а нуль-вектор не може входити до складу незалежної системи; 3) жоден вектор із незалежної системи не є лінійно залежний від решти її векторів.

Теорема 2. Для кожної існуючої у просторі V_{rat} незалежної системи A система $qA=\{q_ie_i:\ e_i\in A\wedge q_i\neq 0\}$ існує та є незалежна.

Доведення. Якби вектор $q_se_s\in qA$ виявився лінійно залежним від деяких векторів із $qA-\{q_se_s\}$, а саме $q_se_s=p_1q_1e_1+\ldots+p_mq_me_m,$ де $p_1\neq 0,\ldots,p_m\neq 0,$ то ми б мали $p_1q_1e_1+\ldots+p_mq_me_m-q_se_s=0_{\bullet}.$ Звідси, за формулою (1), отримали б $p_1q_1=\ldots p_mq_m=-q_s=0,$ що не відповідає дійсності, адже $q_s\neq 0.$!!!

Множину <u>всіх</u> лінійних комбінацій векторів із множини $D \subseteq V_{rat}$ позначимо $\lceil D \rceil$ і отримаємо $\lceil D \rceil = D$ у випадках $D = \varnothing$, $D = \{0_\bullet\}$ та $D = V_{rat}$, а взагалі $D \subseteq \lceil D \rceil$ та $A \subseteq \lceil D \rceil \Rightarrow \lceil A \rceil \subseteq \lceil D \rceil$ (аксіоми c1 та c4 операції замикання [6]), тож у просторі V_{rat} маємо операцію замикання $D \to \lceil D \rceil$. Якщо $D \neq \varnothing$, то, за означенням, $\lceil D \rceil$ є *лінійна оболонка геному* D; мінімальний (за включенням) геном – це *базис* для $\lceil D \rceil$.

3. ***Базис векторного простору*** V_{rat} – це базис B для $\lceil V_{rat} \rceil$, тож для 0-простору базисом є $\{0_\bullet\}$, для 1-простору базисом є кожна його одновекторна підмножина $\{b\}$, окрім $\{0_\bullet\}$; для всіх інших просторів V_{rat} їх базиси B є багатовекторні і жоден із векторів базису B не є лінійно залежний від <u>решти</u> векторів цього ж базису B.

Теорема 3. Такі два твердження щодо <u>багатовекторної</u> підмножини B простору V_{rat} є логічно еквівалентні:
1) B – це максимальна (за включенням) незалежна система векторів;
2) B – це базис простору V_{rat}.

Доведення. Нехай виконується 1), а отже, кожен вектор $v \in V_{rat}$ або є вектором із системи B, або – ні, але тоді система $B \cup \{v\}$ не є незалежна, а тому вектор v повинен бути лінійною комбінацією деяких векторів із системи B, тож маємо 2). Навпаки, нехай виконується 2), а отже, B – це така мінімальна за включенням система, що кожен вектор $v \in V_{rat}$ є лінійною комбінацією деяких векторів із цієї системи, але жоден вектор із цієї системи не є лінійною комбінацією <u>інших</u> векторів із цієї системи, тож B – незалежна система векторів, а її максимальність за включенням випливає з того, що кожен вектор із системи $V_{rat} - B$ є лінійною комбінацією деяких векторів із цієї ж системи, а тому маємо 1). **!!!**

Теорема 4. Якщо один із базисів простору V_{rat} є скінченний, то <u>всі</u> базиси цього простору мають однакову кількість векторів.

Доведення. Теорема очевидна для 0-простору та 1-простору. Нехай B та C – базиси будь-якого <u>іншого</u> простору V_{rat}, а $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ – <u>найменший</u> за кількістю $m \geq 2$ векторів. Тоді існує вектор $c_1 \in C$, який не є вектором із B, але для якого виконується

$$c_1 = p_1 b_1 + \ldots + p_m b_m, \qquad (2)$$

де не всі числа p_i є нулі, адже c_1 не є нуль-вектор. Якби ще $c_1 = q_1 b_1 + \ldots + q_m b_m$, то мали б $0_\bullet = c_1 - c_1 = (q_1 - p_1)b_1 + \ldots + (q_m - p_m)b_m$. Звідси та з того, що, за теоремою 3, система B є незалежна, отримали б $q_j - p_j = 0$ для всіх j, тож для вектора c_1 існує лише одна лінійна комбінація (2). Як вже було сказано, у формулі (2) не всі числа p_i є нулі; скажімо, $p_1 \neq 0$, а тому із формули (2) отримуємо спочатку $p_1 b_1 = c_1 - p_2 b_2 - \ldots - p_m b_m$, потім $b_1 = (1/p_1)c_1 - (p_2/p_1)b_2 - \ldots - (p_m/p_1)b_m$, адже має місце теорема 1. Звідси та з теореми 1 випливає, що будь-яка лінійна комбінація векторів із базису $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ стає лінійною комбінацією векторів із системи $B_1 = \{c_1, b_2, \ldots, b_m\}$, яка складається із $m \geq 2$ векторів, а тому B_1 – базис простору V_{rat}. Взявши вектор $c_2 \in C - \{c_1\}$, аналогічним чином побудуємо у просторі V_{rat} базис $B_2 = \{c_1, c_2, b_3, \ldots, b_m\}$. Зупинимось на базисі $B_m = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Отже, $B_m \subseteq C$. Але ж строгого включення $B_m \subset C$ не може бути за означенням, а тому $B_m = C$. Таким чином, якщо один із базисів простору V_{rat} є скінченний, то всі базиси цього простору є скінченні і мають однакову кількість векторів. **!!!**

Якщо у просторі V_{rat} існує максимальна за включенням незалежна система із $m \geq 2$ векторів $e_1, \ldots, e_m$, то V_{rat} називаємо *m-простором*, адже всі його базиси є, за теоремами 3 та 4, *m*-векторними. Якщо V_{rat} не є m-простором для жодного $m \geq 0$, то V_{rat} називаємо ∞*-простором.* Для довільного простору V_{rat} визначимо його *розмір* $\dim V_{rat}$, а саме $\dim V_{rat} = m$ для m-простору у випадку $m > 0$; але $\dim V_{rat} = 0$ для 0-простору та $\dim V_{rat} = \infty$ – для ∞-простору.

Аналіз одержаних результатів. Отже, маємо раціональний векторний простір V_{rat} як раціональну групу G_{rat}, в якій визначено множення раціональних чисел на її елементи – вектори простору V_{rat}. Теореми 1 – 4 демонструють продуктивність такого підходу, а теорема 1 ще й показує напрямок переходу до класичних результатів. Важливо, основну роль відіграє група G_{rat}, а поле раціональних чисел є допоміжний, але природний інструмент у просторі V_{rat}.

Висновки. Перехід від одержаних результатів до класичних полягає:

а) у відмові від групи G_{rat} на користь довільної абелевої групи G;
б) заміні раціональних скалярів на елементи довільного поля;
в) прийнятті тверджень 1) – 3) теореми 1 як аксіом;
г) введенні аксіоми унітарності: $\forall a \in G\ (1a = a)$.

У разі такого переходу мають місце як переваги (більша загальність), так і недоліки (можливість поділу нуль-вектора на декілька однакових ненульових векторів).

Бібліографічні посилання

1. **Ильин, В. А.** Линейная алгебра [Текст] / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. **Кострикин, А. И.** Линейная алгебра и геометрия [Текст] / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
3. **Общая алгебра** [Текст]: в 2 т. / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – Т.1. – 592 с.
4. **Биркгоф, Г.** Современная прикладная алгебра [Текст] / Г. Биркгоф, Т. Барти. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
5. **Райков, Д. А.** Векторные пространства [Текст] / Д. А. Райков. – М.: Физматгиз, 1962. – 212 с.
6. **Бурдюк, В. Я.** Абстрактні множини (системний аналіз): монографія [Текст] / В. Я. Бурдюк. – Д.: Ліра, 2012. – 160 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2015