УДК 519.63: 519.71

Л. В. Волошко, В. Л. Волошко
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто задачу знаходження оптимальної функції правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння. Пряму задачу досліджено в просторі Соболєва. Ефективність побудованого алгоритму підтверджено точністю отриманих чисельних результатів.

Рассмотрена задача нахождения оптимальной функции правой части неоднородного бигармонического уравнения. Прямая задача была исследована в пространстве Соболева. Эффективность построенного алгоритма подтверждена точностью полученных численных результатов.

Problem of optimal right-hand side function finding for inhomogeneous biharmonic equation has been consudered. Forward problem has been investigated in Sobolev spaces. The effectiveness of constructed algorithm was confirmed by accuracy of obtained calculations.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, узагальнена функція, градієнтний метод, оптимальне керування

Вступ

У процесі побудови математичних моделей технічного процесу є практична необхідність визначення базових параметрів, що характеризують цей процес, та подальшого знаходження їх оптимального значення. Такі задачі розглядають у галузі теорії керування та обернених задач. Бігармонічне рівняння є одним з основних об'єктів математичної фізики, крайові задачі якої часто розглядаються як диференціальні зв'язки в задачах оптимального керування. Проведений аналіз літературних джерел [2; 5] показав, що задача оптимального керування параметрами крайової задачі бігармонічного рівняння з метою отримати заданий стан є достатньо актуальна. Її розв'язок може бути застосований до створення систем із заданою поведінкою або за їх ідентифікації.

Постановка і розв'язання прямої задачі

Розглянемо таку задачу. Знайти таку функцію $w(x, y),$ яка б задовольняла неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \qquad (1)$$

та крайові умови

$$w = \varphi(x, y), \qquad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \qquad (2)$$

в області $\Omega \in R^2$, оточеній ліпшицевим контуром Г.

Така задача є добре досліджена для гладких функцій у відповідній області визначення [5]. Далі її досліджуємо у просторі Соболєва $W^{k,p}$. Це означає, що функцію розв'язку $w(x, y)$ і функцію правої частини $f(x, y)$ розглядають як узагальнені, а функції крайових умов $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ − як сліди функції $w(x, y)$ на межі Г. Як відомо, для $p = 2$, простір Соболєва $W^{k,2}$ збігається з гільбертовим простором H^k. Поклавши функцію розв'язку $w(x, y)$ з простору $H^2(\Omega)$, відповідно до теорем про вкладення просторів Соболєва та теорем про сліди, отримаємо таку належність класам:

$$f(x, y) \in H^{-2}(\Omega),\ \varphi(x, y) \in H^{3/2}(\Gamma),\ \psi(x, y) \in H^{1/2}(\Gamma),$$

де $H^{-2}(\Omega)$ − простір, спряжений до простору $H_0^2(\Omega)$. Таку постановку задачі називають слабкою.

Покажемо існування і єдиність розв'язку цієї задачі [1]. Нехай функція $Q(x, y) \in H^2(\Omega)$ така, що її сліди на межі збігаються з крайовими умовами, тобто $T(Q(x, y)) = \varphi(x, y), T\left(\frac{Q(x, y)}{dn}\right) = \psi(x, y).$ Тоді, за лемою

Лакса-Мільграма, існує єдина функція $z(x,y)\in H_0^2(\Omega)$, яка задовольняє відповідну задачу з однорідними крайовими умовами

$$\Delta\Delta z(x,y)=f(x,y)-Q(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega,$$

$$T(w)=0, \qquad T\left(\frac{dw}{dn}\right)=0, \qquad (x,y)\in\Gamma.$$

Таким чином, згідно з властивостями слідів

$$T(w)=T(z)+T(Q)=0+\varphi(x,y)=\varphi(x,y),$$
$$T\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)=T\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)+T\left(\frac{\partial Q}{\partial n}\right)=0+\psi(x,y)=\psi(x,y)$$

та леми Лакса-Мільграма існує і єдиний слабкий розв'язок $w(x,y)\in H^2(\Omega)$, такий що $w(x,y)=z(x,y)+Q(x,y).$

У результаті застосування методу потенціалу отримано розв'язок прямої задачі (1) – (2) в такому вигляді [4]:

$$w(x,y)=\frac{1}{8\pi}\iint_\Omega K^1(x,y;\tilde{x},\tilde{y})\cdot f(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y})+$$
$$+\int_\Gamma \left(\left(K^1(x,y;\xi,\eta),\, K^2(x,y;\xi,\eta)\right)\cdot\begin{pmatrix}\mu_1(\xi,\eta)\\ \mu_2(\xi,\eta)\end{pmatrix}\right)d\Gamma(\xi,\eta)=$$
$$=\frac{1}{8\pi}\iint_\Omega K^1(x,y;\tilde{x},\tilde{y})\cdot f(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y})+\int_\Gamma\left(\left(K^1(x,y;\xi,\eta),\, K^2(x,y;\xi,\eta)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_\Gamma \tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta})\cdot\begin{pmatrix}\varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})-w_1(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\\ \psi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})-\dfrac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\end{pmatrix}d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)\right)d\Gamma(\xi,\eta), \quad (x,y)\in\Omega,$$

де $K^1(x,y;\xi,\eta)=r^2(x,y;\xi,\eta)\ln r(x,y;\xi,\eta);$ $K^2(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{\partial K^1}{\partial\nu}$ – ядра бігармонічних потенціалів; $r(x,y;\xi,\eta)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2};$ $\tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ – обернений оператор системи інтегральних рівнянь, до якої зводиться задача (1) – (2); $w_1(x,y)=\dfrac{1}{8\pi}\iint_\Omega K^1(x,y;\tilde{x},\tilde{y})\times \quad \times f(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y})d\Omega(\tilde{x},\tilde{y})$ − частинний розв'язок рівняння (1).

Постановка і розв'язання задачі керування

Очевидно, що розв'язок задачі (1) – (2) залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов. У припущенні, що функції $\varphi(x,y)\in H^{3/2}(\Omega)$ і $\psi(x,y)\in H^{1/2}(\Omega)$ задані, поставимо задачу знаходження таких функцій: $w(x,y)\in H^2(\Omega)$ і $f(x,y)\in H^{-2}(\Omega)$, які доставляють мінімум функціоналу

$$I(w(\cdot,\cdot),\,f(\cdot,\cdot))=\iint_\Omega (w(x,y)-w_{fixed}(x,y))^2\,dxdy. \qquad (3)$$

Його більш детально можна записати так:

$$I(w(\cdot,\cdot),\ f(\cdot,\cdot)) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} K^1(x,y;\tilde{x},\tilde{y}) \cdot f(\tilde{x},\tilde{y}) d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) + \right.\right.$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \left(\left(K^1(x,y;\xi,\eta),\ K^2(x,y;\xi,\eta) \right) \cdot \int\limits_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \times \right.$$

$$\times \left. \left(\begin{matrix} \varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - \dfrac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} K^1(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{x},\tilde{y}) \cdot f(\tilde{x},\tilde{y}) d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \psi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - \dfrac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} K^3(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{x},\tilde{y}) \cdot f(\tilde{x},\tilde{y}) d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) \end{matrix} \right) d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\, d\Gamma(\xi,\eta) \right)$$

$$\left. - w_{fixed}(x,y) \right]^2 dxdy.$$

Множину допустимих розв'язків задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння було отримано таким чином:

$$B = \left\{ (w,\ f) \left| \begin{array}{l} w(x,y) \in H^2(\Omega),\ \Delta\Delta w(x,y) = f(x,y) \in H^{-2}(\Omega) \\ T(w(x,y)) = \varphi(x,y) \in H^{3/2}(\Gamma) \\ T\left(\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial n} \right) = \psi(x,y) \in H^{1/2}(\Gamma) \\ I(w(\cdot,\cdot),\ f(\cdot,\cdot)) < +\infty \end{array} \right. \right\}.$$

Тобто множина *B* містить такі пари функцій $w(x,y)$ і $f(x,y)$, які задовольняють слабку постановку задачі (1) – (2) і для яких функціонал (3) є обмежений. Тоді скорочено задачу запишемо у такий спосіб:

$$I(w(\cdot,\cdot), f(\cdot,\cdot)) \to \min_{(f,w)\in B}. \qquad (4)$$

Якщо в функціоналі (3) $w(x,y) \in H^2(\Omega)$, $f(x,y) \in H^{-2}(\Omega)$, $\varphi(x,y) \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\psi(x,y) \in H^{1/2}(\Gamma)$, то цей функціонал є опуклий і для нього існує похідна Фреше. На множині *B* його визначення існує єдиний мінімум, який досягається за $(w^*(x,y), f^*(x,y)) \in P,$ тобто $I(w^*, f^*) = \min\limits_{(w,f)\in B} I(w,f),$ де $w^*(x,y)$ – розв'язок задачі (1) – (2) за $f^*(x,y).$ Похідна Фреше функціоналу якості (3) має такий вигляд:

$$\frac{\partial I(w,f)}{\partial f} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(w(x,y) - w_{fixed}(x,y) \right) \cdot \left(\iint\limits_{\Omega} K^1(x,y;\tilde{x},\tilde{y}) d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) - \right.\right.$$

$$- \int\limits_{\Gamma} \left(K^1(x,y;\xi,\eta),\ K^2(x,y;\xi,\eta) \right) \times$$

$$\left.\left. \times \int\limits_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \cdot \left(\begin{matrix} \iint\limits_{\Omega} K^1(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{x},\tilde{y}) d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \iint\limits_{\Omega} K^3(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{x},\tilde{y}) d\Omega(\tilde{x},\tilde{y}) \end{matrix} \right) d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) d\Gamma(\xi,\eta) \right) \right] dxdy.$$

Алгоритм розв'язування задачі (1) – (2), (4) побудований на основі градієнтного методу з дробленням кроку [3, 4]. Цей метод передбачає визначення похідної Фреше в кожній точці $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \in \Omega$:

$$\frac{\partial I(w,f)}{\partial f} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(w(x,y) - w_{fixed}(x,y) \right) \cdot \left(K^1(x,y;\tilde{x}^*,\tilde{y}^*) - \right.\right.$$

$$- \int\limits_{\Gamma} \left(K^1(x,y;\xi,\eta),\ K^2(x,y;\xi,\eta) \right) \times$$

$$\left.\left. \times \int\limits_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi,\eta;\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \cdot \left(\begin{matrix} K^1(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{x}^*,\tilde{y}^*) \\ K^3(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{x}^*,\tilde{y}^*) \end{matrix} \right) d\Gamma(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) d\Gamma(\xi,\eta) \right) \right] dxdy.$$

Таким чином, для розв'язування задачі (1) – (2), (4) побудовано ітераційний процес, на кожному кроці якого розв'язується пряма задача (1) – (2).

Модельна задача

Для перевірки достовірності роботи описаного вище алгоритму складемо таку модельну задачу. Розглянемо множину функцій

$$w(x,y) = (\lambda^2+1)\cdot(1-(x^2+y^2))^2 + (1-(x^2+y^2)),\ \ \lambda\in[0;1] \qquad (16)$$

в області Ω, яка обмежена контуром Γ: $x^2+y^2=1$. Тоді модельна задача матиме такий вигляд:

$$\Delta\Delta w = 64(\lambda^2+1) \equiv f(\lambda), \quad (x,y)\in\Omega$$

$$w(x,y) = \varphi(x,y) \equiv 0,$$

$$\frac{dw(x,y)}{dn} = \psi(x,y) = 2, \qquad (x,y)\in\Gamma,$$

$$I(w, f(\lambda)) \to \min_{\lambda\in[0;1]},$$

де $I(w, f(\lambda)) = \iint\limits_{\Omega} w^2(x,y;\lambda)dxdy$. Якщо покладемо $w_{fixed}(x,y)\equiv 0$ і візьмемо за початкове наближення праву частину бігармонічного рівняння модельної задачі за $\lambda^{(0)}\neq 0$, то маємо отримати послідовності, які б збігалися до точного розв’язку, тобто $\lambda^{(k)}\to 0,\ \ f^{(k)}(\lambda)\to 64,\ \ I(f^{(k)})\to 0.$

Отримано таблицю з результатами обчислювального експерименту за різних початкових наближень та точності $\varepsilon = 0.00001$.

Результати обчислювального експерименту для визначення оптимальної правої частини рівняння

λ^0	Кількість ітерацій	Початкове $f^0(x,y)$	Наближене $f(x,y)$	Точне $f(x,y)$	Похибка $f(x,y)$	Початкове $I(w^0,f^0)$	Наближене $I(w,f)$	Точне $I(w,f)$	Похибка $I(w,f)$
0.2	15	66.56	65.98	64	-1.98	3.35	3.33	3.24	-0.09
0.3	17	69.76	65.98	64	-1.98	3.50	3.33	3.24	-0.09
0.5	22	90.00	65.98	64	-1.98	3.98	3.33	3.24	-0.09

Як і очікувалось, порівняння даних таблиці свідчить про те, що шукана функція і відповідний функціонал прямують до розв’язку, що є підтвердженням достовірності. Ітераційний процес збігається швидко на перших кроках, а потім різко сповільнюється.

Висновок

Таким чином, у роботі викладено спосіб розв’язування задачі оптимального керування правою частиною рівняння та модельна задача для перевірки достовірності отриманих результатів. Для розв’язування прямої задачі було застосовано метод потенціалу. Для задачі оптимального керування − градієнтний метод, на кожній ітерації якого розв’язувалась пряма задача. Практична програмна реалізація та порівняння результатів модельної задачі свідчать про ефективність застосування цього підходу для розв’язування задач оптимального керування правою частиною рівнянь еліптичного типу.

Бібліографічні посилання

1. **Buttazzo, G.** Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems [Text] / G. Buttazzo, P. I. Kogut // Revista Matematica Complutense. — 2011. — Vol. 24. – P. 83–94.

2. **Tiba, D.** Optimal Control Methods and the Variational Approach to Differential Equations, [Text] / D. Tiba // Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of IMECS 2013. — 2013. — P. 127–132.

3. **Волошко, Л.В.** Розв’язування задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння [Текст] / Л.В. Волошко // Вісник Запорізького національного університету, серія «Фізико-математичні науки». — 2014. — № 1. — С. 4 —14.

4. **Киселева, Е.М.** Решение задачи оптимального граничного управления для неоднородного бигармонического уравнения [Текст] / Е.М. Киселева, Л.В. Волошко // Проблемы управления и информатики. — 2014. — №4. — С. 58–68.

5. **Когут, О.П.** Оптимізація в еліптичних крайових задачах [Текст] / О.П. Когут, П.І. Когут, О.А. Рядно. — Дніпропетровськ.: ДДФА, 2010. — 238с.

6. **Тихонов, А.Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарський. — М.: Наука, 1972. — 736с.

Надійшла до редколегії 06.05.2015