

О МОДЕЛЯХ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Запропоновано нові моделі оптимального розбиття множин в умовах нечіткої вихідної інформації.

Предложены новые модели оптимального разбиения множеств в условиях нечеткой исходной информации.

New models of optimal set partitioning in the conditions of fuzzy initial information are offered.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, неопределенность, нечеткая информация.

При решении прикладных задач информация, требуемая для построения математической модели, как правило, не является точно определенной, и поэтому построение моделей и разработка методов решения, которые позволяют учесть эту неопределенность является актуальной задачей.

В [1] рассмотрены задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности для случаев, когда неопределенность имеет стохастическую природу, а также некоторые модели оптимального нечеткого разбиения множеств. Эти модели соответствуют задачам, в которых нечетким является полученное оптимальное разбиение. При этом исходные данные предполагаются полностью определенными. Однако, как правило, именно исходная информация является довольно расплывчатой, нечеткой.

В данной работе предложены математические модели, в которых нечеткими являются именно исходные данные. При этом получаемое решение должно быть вполне определенным.

Рассмотрим бесконечномерную задачу размещения, общая постановка которой дана в [1].

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω . Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках τ_i , $i = \overline{1, N}$ области Ω , образуют систему точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, причем координаты некоторых из них, или даже всех, могут быть заранее неизвестны. Известен спрос $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω , а также стоимость доставки продукции $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – из пункта производства τ_i в пункт потребления x . Предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов. Мощность i -го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i , $i = \overline{1, N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

В реальных задачах точно определить спрос, задать его количественную оценку, часто невозможно, но при этом можно оценить его как «высокий», «низкий» и т. д. Таким образом, в каждой точке области мы можем задать некоторое качественное значение, которое удобно описывать с помощью нечетких множеств. Функция спроса при этом будет задана в виде некоторого нечеткого отображения множества Ω на множество $R^+ = [0; +\infty)$. Т. е. на множестве Ω будет задано нечеткое отображение ρ с функцией принадлежности $\mu_\rho(\tilde{\alpha}, r): \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$. Каждому потребителю x из Ω в этом случае ставится в соответствие некоторое нечеткое множество на R^+ , описывающее спрос на продукцию. А именно, для каждого фиксированного $\tilde{\alpha}'$ соответствующее ему нечеткое значение функции ρ будет описываться функцией принадлежности $\mu_\rho(\tilde{\alpha}', r)$.

Аналогично, функцию стоимости также можно определить как нечеткое отображение множества Ω^2 в R^+ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{c}_i}(\tilde{\alpha}, \tau_i, r): \Omega \times \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$. Нечеткое значение функции для каждого фиксированного $\tilde{\alpha}'$ и τ_i будет нечетким множеством на R^+ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{c}_i}(\tilde{\alpha}', \tau_i, r)$.

Кроме того, значения мощности производителей b_i , $i = \overline{1, N}$ также могут быть заданы нечетко, в виде нечетких множеств.

Таким образом, получаем следующие задачи оптимального разбиения множеств при нечетких исходных данных:

Задача 1. (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с фиксированными центрами подмножеств без ограничений).

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, центры которых $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ заданы, так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \quad (1)$$

достигал минимального значения при ограничениях:

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (3)$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – нечеткие отображения множества Ω^2 в \mathbb{R}^+ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{c}_i}(\tilde{\delta}, \tau_i, r): \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$, $\rho(x)$ – нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_{\rho}(\tilde{\delta}, r): \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$.

Задача 2. (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств без ограничений).

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \quad (4)$$

достигал минимального значения при ограничениях:

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (6)$$

$c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, $\rho(x)$ описываются также как в задаче 1.

Задача 3. (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с фиксированными центрами подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств).

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, центры которых $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ заданы так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \quad (7)$$

достигал минимального значения при ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (8)$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (9)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (10)$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – нечеткие отображения множества Ω^2 в \mathbb{R}^+ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{c}_i}(\tilde{c}, \tau_i, r): \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$; $\rho(x)$ нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}, r): \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$; b_i , $i = \overline{1, N}$ заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи ($\sum_{i=1}^N b_i \geq S$, $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$).

Задача 4. (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств).

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \quad (11)$$

достигал минимального значения при ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (12)$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (14)$$

Здесь функции $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ и $\rho(x)$, а также параметры b_i , $i = \overline{1, N}$ определяются как в предыдущей задаче.

Учитывая возможную нечеткость в задании b_i , $i = \overline{1, N}$, получим задачу вида:

Задача 5. (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств).

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \quad (15)$$

достигал минимального значения при ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (16)$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (17)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (18)$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – нечеткие отображения множества Ω^2 в \mathbf{R}^+ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{c}_i}(\tilde{\delta}, \tau_i, r): \Omega \times \Omega \times \mathbf{R}^+ \rightarrow [0; 1]$; $\rho(x)$ – нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_{\rho}(\tilde{\delta}, r): \Omega \times \mathbf{R}^+ \rightarrow [0; 1]$; \tilde{b}_i , $i = \overline{1, N}$ – заданные нечеткие числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи.

Интегралы в постановках отображают суммирование по всем x из Ω и в зависимости от выбранного метода решения задачи рассматриваются как интегралы Лебега либо как нечеткие интегралы.

Предложенные модели сформулированы для случая, когда должно быть получено четкое решение задачи в виде обычного разбиения множества Ω и могут быть обобщены на класс нечетких разбиений.

Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М.Киселева, Н.З. Шор – К., 2005 – 564 с.

Надійшла до редколегії 15.05.10