УДК 519.8

О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, О.В. Зайченко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ОДНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ З НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИМ ФУНКЦІОНАЛОМ

Представлена неперервна задача оптимального розбиття множини, яка характеризується недиференційовним функціоналом та наявністю сімейства звичайних диференціальних рівнянь, що описують в кожній точці множини динаміку деякого параметра задачі залежно від приналежності точки певній підмножині вихідної множини .

Представлена непрерывная задача оптимального разбиения множества, которая характеризуется недифференцируемым функционалом и наличием семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторого параметра задачи в зависимости от принадлежности точки определенному подмножеству исходного множества.

The dynamic continuous set partition problem is performed. This problem is being characterized by non-differential functional and presence of differential equations set, that describe dynamics of some problem's parameters depending on belonging a point to defined subset.

Ключові слова: оптимальне розбиття множини, диференціал Гато, метод лінеаризації.

Вступ. Неперервним задачам оптимального розбиття множин (ОРМ) в різних їх постановках (лінійних, детермінованих, одно- та багатопродуктових, стохастичних, динамічних, нечітких) присвячена велика кількість наукових публікацій. Докладна класифікація задач і методів ОРМ наведена в [1]. Представлена в даній роботі динамічна задача оптимального розбиття множини відрізняється від розглянутих раніше [1–3] по-перше, виглядом цільового функціонала; по-друге, нелінійною динамікою функції попиту, яка, у свою чергу, визначається приналежністю точки (споживача) до зони впливу певного виробника. У досліджуваній задачі розбиття передбачається статичним, за аналогією з [3] і на відміну від [2], де оптимальне розбиття множини може бути різним, тобто границі між підмножинами можуть бути рухомими.

Як і в [2;3] сформульовану задачу розбиття можна віднести до класу задач оптимального керування системами із зосередженими параметрами з особливою структурою множини допустимих керувань. Тому для її дослідження і розв'язання будемо поєднувати математичні апарати теорії неперервних задач ОРМ та теорії керування динамічними системами.

Слід ще раз наголосити, що постановка задачі містить функціонал, який є недиференційовним за Фреше, а має лише похідні за напрямами у функціональному просторі. Ця властивість вносить певні особливості до процесу розв'язання задачі. У роботі пропонується застосовувати метод послідовної лінеаризації Р.П. Федоренко, який добре зарекомендував себе при розв'язанні задач оптимального керування з функціоналами, що містять функції $|\cdot|$, $\max(\cdot)$ та інші [4].

Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset R^2$ – деяка обмежена вимірна за Лебегом множина; $u_i(x,t) \in L_2(\Omega \times [0,T]), i = \overline{1,N}$ – заданий набір функцій; $T > 0$ – фіксована величина; $P_N(\Omega)$ – клас всіляких розбиттів множини Ω на N підмножин:

$P_N(\Omega) = \{\overline{\omega} = (\Omega_1,...,\Omega_N) : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,N}\}$. Потрібно

$$F(\overline{\omega}) = \int_{\Omega}\int_{0}^{T} |\rho(x,t;\overline{\omega}) - \xi(x,t)| dt dx \to \min_{\overline{\omega} \in P_N(\Omega)}, \qquad (1)$$

де функція $\rho(x,(\cdot);\overline{\omega})$ для кожного розбиття $\overline{\omega} = (\Omega_1,\ldots,\Omega_N) \in P_N(\Omega)$ і для кожного $x \in \Omega_i$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} &\dot{\rho}(x,t) = \alpha\rho(x,t) - \beta\rho^2(x,t) + u_i(x,t), \quad t \in [0,T] \\ &\rho(x,0) = \rho_0(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ – задані величини; $\rho_0(x) \in L_2(\Omega)$, $\xi(x,t) \in L_2(\Omega \times [0,T])$ – відомі функції.

Задачі (1), (2) можна надати таку економічну інтерпретацію. Нехай розглядається співіснування виробників однотипових товарів (подібних за ціною та якістю), споживачами яких є певний прошарок суспільства з

© *О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, О.В. Зайченко, 2010*

приблизно однаковим рівнем накопичувань (чи доходів), які мешкають в однакових умовах та мають однакову шкалу побажань. Виробники товарів іншої якості співіснують в іншій ринковій ніші. Спільним інтересом для фірм-виробників однотипового товару є утримання попиту $\rho(x,t)$ на даний товар на певному рівні $\xi(x,t)$, який можливо лише дещо збільшувати з часом, зберігаючи при цьому головну тенденцію коливання в області оптимального для виробників попиту, за умов врахування граничної межі споживання даного товару та виробничих потужностей підприємства. Оскільки динаміка попиту прямо пропорційно залежить від кількості населення вказаного прошарку суспільства, тому будемо вважати, що зміна попиту прямо пропорційна зміні з часом чисельності населення [5]. Крім того, підвищення попиту на продукцію може здійснюватися за рахунок проведення суб'єктами виробництва певних дій, що пожвавлюють попит, а саме – незначного скорочення вартості товару за рахунок модернізації виробництва, рекламної акції, тощо. Сила впливу таких дій і-го виробника описується функцією $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,N}$. Тому що виробники співіснують, немає сенсу кожному з них «вкладати кошти» в кожного споживача. Потрібно лише розподілити споживачів на зони впливу виробників з урахуванням їх спільних інтересів.

Метод розв'язання. Введення характеристичних функцій $\lambda_i(\cdot)$ підмножин Ω_i, $i=\overline{1,N}$ дозволяє перейти від (1), (2) до еквівалентної задачі

$$I(\lambda(\cdot))=\int_{\Omega}\int_{0}^{T}\left|\rho(x,t;\lambda(x))-\xi(x,t)\right|dtdx\to\min_{\lambda\in\Lambda_1}, \tag{3}$$

де через $\rho(x,\cdot;\lambda(x))$ кожному $x\in\Omega$ відповідає розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned}&\dot{\rho}(x,t)=\alpha\rho(x,t)-\beta\rho^2(x,t)+\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i(x),\quad t\in[0,T]\\&\rho(x,0)=\rho_0(x),\\&\Lambda_1=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x)):\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1\ м.\ в.\ для\ x\in\Omega;\\&\lambda_i(x)=0\vee 1\ м.в.для\ x\in\Omega;\ i=\overline{1,N}\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Далі, згідно до теорії неперервних задач оптимального розбиття, множина Λ_1 занурюється в симплекс

$$\Lambda_0=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x)):\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1\ м.\ в.\ для\ x\in\Omega;$$

$$0\le\lambda_i(x)\le 1\ м.в.для\ x\in\Omega;\ i=\overline{1,N}\}$$

і задача (3), (4) зводиться до задачі

$$I(\lambda(\cdot))\to\min_{\lambda\in\Lambda_0}, \tag{5}$$

за умов (4).

Задачу (5), (4) будемо розглядати як задачу оптимального керування, в якій керуючою функцією для кожного $x\in\Omega$ виступає функція $u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i(x),\ \lambda\in\Lambda_0$. Застосуємо метод, в основі якого лежить ідея побудови мінімізуючої послідовності функцій $\lambda^k(\cdot)\in\Lambda_0$.

Схема методу.

1. $k=0$. Фіксується $x\in\Omega$. Задається $\lambda^0(\cdot)\in\Lambda_0$.

2. Для кожного $x\in\Omega$ з функцією $u^{(k)}(x,t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i^{(k)}(x)$ розв'язується задача Коші (4).

3. Обчислюється значення функціонала $I(\lambda(\cdot))$ з (5).

4. В околі незбуреного процесу $\left\{\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda^k(x),\rho(x,t)\right\}$ задача лінеаризується. Процес лінеаризації включає два етапи: 1) обчислення диференціалу Гато $D(\lambda^k(\cdot),v^k(\cdot))=D(\lambda^k(\cdot),\bar{\lambda}(\cdot)-\lambda^k(\cdot));\ \bar{\lambda}(\cdot)\in\Lambda_0$; 2) побудову малого околу $\delta\Lambda_0$ незбуреної функції $\lambda^k(\cdot)$.

Формулюється і розв'язується задача: знайти приріст (збурення) $\nu^k(\cdot) = \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)$ функції $\lambda^k(\cdot)$ з умови

$$\min_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_0} D(\lambda^{(k)}(\cdot), \lambda(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)) = D(\lambda^{(k)}(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)). \qquad (6)$$

Ця задача є лінеаризацією задачі, що розв'язується, в околі незбуреного процесу $\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i(\cdot,t)\lambda^k(\cdot); \rho(\cdot,t)\right\}$.

Розв'язання задачі (6) дозволяє здійснити основний крок процесу – перехід до наступного наближення

$$\lambda^{k+1}(\cdot) = \lambda^k(\cdot) + s(\bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)). \qquad (7)$$

Параметр $s \in [0,1]$ підбирається, задовольняючи умову релаксації:

$$I(\lambda^{k+1}(\cdot)) < I(\lambda^k(\cdot)). \qquad (8)$$

Критерієм закінчення ітераційного процесу може виступити одна з нерівностей

$$\left\|\lambda^{k+1}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)\right\| \le \varepsilon; \quad \left|I^{k+1} - I^k\right| \le \varepsilon; \quad \left|D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot))\right| \le \varepsilon.$$

Диференціал Гато функціоналу задачі (5). Відомо, що $I(\lambda(\cdot))$ буде *диференційовним за Гато*, якщо для будь-якої вектор-функції $\nu(\cdot)$ (з того ж простору, що і $\lambda(\cdot)$) має місце формула

$$I(\lambda(\cdot) + s\nu(\cdot)) = I(\lambda(\cdot)) + sD(\lambda(\cdot), \nu(\cdot)) + o(s), \qquad (9)$$

де s - довільне мале невід'ємне число, $D(\lambda(\cdot), \nu(\cdot))$ – деякий функціонал, що називається похідною функціонала I в точці $\lambda(\cdot)$ за напрямом $\nu(\cdot)$ (диференціалом Гато).

Для кожної точки $x \in \Omega$ введемо до розгляду множини:

$$\Theta^0(x) = \{t \in [0,T]: \ \rho(x,t;\lambda(x)) - \xi(x,t) = 0\};$$
$$\Theta^+(x) = \{t \in [0,T]: \ \rho(x,t;\lambda(x)) - \xi(x,t) > 0\};$$
$$\Theta^-(x) = \{t \in [0,T]: \ \rho(x,t;\lambda(x)) - \xi(x,t) < 0\}.$$

Варіацією функції $\lambda^{(k)}(\cdot) \in \Lambda_0$ будемо вважати функцію $\nu(\cdot) = \lambda(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)$, де $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$.

Дамо приріст $\delta\lambda(\cdot) = s\nu(\cdot)$ функції $\lambda^{(k)}(\cdot)$, де $s > 0$ - достатньо малий параметр. Цьому приросту відповідає приріст фазової траєкторії $\delta\rho$, що задовольняє лінеаризовану задачу Коші

$$\dot{\delta\rho} = \alpha(\delta\rho) - 2\beta\rho(\delta\rho) + \sum_{i=1}^{N} u_i(x,t)s\nu_i(x);$$
$$\delta\rho(x,0) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \qquad (10)$$

Розглянемо значення

$$I(\lambda^{(k)}(\cdot) + \delta\lambda(\cdot)) = \int_\Omega \int_0^T \left|\rho(x,t;\lambda^{(k)}(x)) - \xi(x,t) + \delta\rho(x,t) + O(\|\delta\lambda\|^2)\right| dt dx =$$

$$= \int_\Omega \left\{ \int_{\Theta^0(x)} |\delta\rho(x,t)| dt + \int_{\Theta^+(x)} \{\rho(x,t;\lambda^{(k)}(x)) - \xi(x,t) + \delta\rho(x,t)\} dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\Theta^-(x)} \{\rho(x,t;\lambda^{(k)}(x)) - \xi(x,t) + \delta\rho(x,t)\} dt \right\} dx + O(s)$$

Порівнюючи цей вираз з (9), заключаємо, що диференціал Гато функціонала $I(\lambda(\cdot))$ обчислюється за формулою

$$D(\lambda^0(\cdot), \nu(\cdot)) = \int_\Omega \left\{ \int_{\Theta^0(x)} |\delta\rho(x,t)| dt + \int_{\Theta^+(x)} \delta\rho(x,t) dt - \int_{\Theta^-(x)} \delta\rho(x,t) dt \right\} dx.$$

Використовуючи рівняння у варіаціях (10) та тотожність Лагранжа, цей вираз можна записати в еквівалентному вигляді відносно приросту $s\nu(\cdot)$:

$$D(\lambda^0(\cdot),\nu(\cdot)) = = s\int_{\Omega}\left\{\int_{\Theta^0(x)}\left|\int_0^T\sum_{i=1}^N u_i(x,t)\nu_i(x)\psi(x,t,t')dt\right|dt' + \int_0^T\sum_{i=1}^N u_i(x,t)\nu_i(x)\psi(x,t)dt\right\}dx,$$

де для кожного $x\in\Omega$ функція $\psi(x,\cdot)$ є розв'язком задачі Коші

$$-(\dot\psi(x,t)+(\alpha-2\beta\rho)\delta\rho\psi(x,t)) = \begin{cases} 1, & t\in \Theta^+(x);\\ 0, & t\in \Theta^0(x);\\ -1, & t\in \Theta^-(x);\end{cases} \tag{11}$$

$$\psi(x,T)=0 \quad x\in\Omega; \quad t\in[0,T], \tag{12}$$

а для кожного $t'\in\Theta^0(x)$ функція $\psi(x,t,t')$ – розв'язок задачі

$$\delta(t-t')\,\dot\psi(x,t,t')+(\alpha-2\beta\rho)\psi(x,t,t') = \delta(t-t'), \tag{13}$$

$$\psi(x,T,t')=0 \ \ x\in\Omega, \tag{14}$$

$\delta(t-t')$ – функція Дирака. Підкреслимо, що у випадку, коли $mes\Theta^0(x)=0$ майже всюди для $x\in\Omega$, функционал (5) буде диференційовним за Фреше, і його похідна обчислюється після розв'язання задачі Коші (11)–(12) за формулою

$$\frac{\partial I(\lambda(\cdot))}{\partial\lambda_i(\cdot)} = \int_0^T \psi(\cdot,t)u_i(\cdot,t)dt,$$

що відповідає результатам, отриманим у процесі дослідження задач типу (4) – (5) з лінійним критерієм якості.

Зауваження щодо чисельної реалізації алгоритму розв'язання задачі. Під час реалізації наведеної вище схеми розв'язання задачі (4) – (5) область Ω покривається рівномірною сіткою з кроком h_x по змінній *x*, h_y - по змінній *y*:

$$\gamma = \left\{(x_i,y_j):\ x_i = x_0+ih_x,\ y_j = y_0+ih_y,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m1}}\right\}.$$

Функцією $\lambda(\cdot)$, яка є розв'язком вихідної задачі, буде кусково-стала функція

$$\lambda(q)=\lambda_{i+1/2,j+1/2}(q),\ \ q=(x,y);\quad x_i\le x\le x_{i+1};\ y_j\le y\le y_{j+1}.$$

Варіації $\nu(\cdot)$ шукаємо в тому ж самому класі функцій.

Задається початкове наближення $\lambda^0(\cdot)$. Розв'язується задача Коші (4), наприклад, методом Рунге-Кутта тим самим обчислюються значення траєкторії $\rho(\cdot,\cdot):\ \ \rho_{ij}^{\ l}=\rho(x_i,y_j;t_l)$.

Для кожної точки q сітки γ обчислення значення похідної Гато функціонала (5) в точці $\lambda^k(\cdot)$ потребує інтегрування задач Коші (11), (12) та (13), (14). При цьому слід виділити множини індексів $M_\varepsilon^-, M_\varepsilon^+, M_\varepsilon^0$ следующим образом:

$l\in M_{ij}^-$, якщо $\rho_{ij}^l-\xi(x_i,y_j;t_l)<-\varepsilon$;

$l\in M_{ij}^+$, якщо $\rho_{ij}^l-\xi(x_i,y_j;t_l)>\varepsilon$;

$l\in M_{ij}^0$, якщо $\left|\rho_{ij}^l-\xi(x_i,y_j;t_l)\right|\le\varepsilon,\ \ \varepsilon>0$.

Величину $\varepsilon>0$ слід обирати якомога менше, але з урахуванням того, що складність розв'язання задачі пов'язана з кількістю індексів у множині $\grave{I}_{ij}^{\ 0}$. У той же час ε не повинне бути надто малим, щоб уникнути переходу за один крок процесу будь-якого індексу l з $\grave{I}_{ij}^{\ -}$ в $\grave{I}_{ij}^{\ +}$.

Далі записується скінченновимірна апроксимація задачі (6). Замінивши у виразі похідної Гато інтеграли інтегральними сумами, отримуємо наступну задачу для обчислення функції $\overline{\lambda}(\cdot)$

$$\sum_{p=1}^N\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m1}\sum_{l=1}^{m2}\overline{A}_{ij}^l u_{ijl}^p(\lambda_{ij}^p-\lambda_{ij}^{0p}) + \sum_{(i,j)\in\gamma}\left|\sum_{p=1}^N\sum_{l\in M_{ij}^0}A_{ij}^l u_{ijl}^p(\lambda_{ij}^p-\lambda_{ij}^{0p})\right| \to \min_{\lambda},$$

за умов

$$0 \le \lambda_{ij}^{p} \le 1, \mathrm{p} = \overline{1,\mathrm{N}}; \qquad \sum_{p=1}^{N} \lambda_{ij}^{p} = 1; \ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}}; \ \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m1}} \ .$$

Ця задача зводиться до задачі лінійного програмування [4] і розвязується симплекс-методом.

Як результат методу послідовної лінеаризації отримуємо в кожній точці сітки γ значення вектор-функції $\lambda^{*}(\cdot)$, яка є розв'язком задачі (4), (5). Ця функція може містити або всі цілі компоненти (і тоді вона є також оптимальним розв'язком задачі (3), (4)), або декілька дробових значень, які можна округлити, наприклад за таким правилом: для кожної точки сітки γ більшій компоненті вектора $\lambda^{*}(\cdot)$ відповідає значенняе цієї компоненти вектора $\lambda^{**}(\cdot)$, що дорівнює 1, решта компонент вектора $\lambda^{**}(\cdot)$ буде дорівнювати нулю. Звичайно, при зростанні вимірності задачі, тобто при зростанні кількості вузлів сітки γ, дробові значення будуть з'являтися частіше, і тоді для отримання розвязку задачі (3), (4) слід використовувати методи цілочисельного лінійного програмування.

Висновки. За межами роботи залишаються відкритими питання: обгрунтування можливості дискретизації області Ω і заміни сімейства задач Коші (2) скінченою їх кількістю. Доцільним також є врахування факторів міграції споживачів та конкуренції між виробниками, які можуть суттєво впливати на вибір споживача.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К., 2005. – 564.
2. **Коряшкіна Л.С.** Особливості розв'язку задачі оптимального розбиття множин з рухомими границями між підмножинами / Л.С. Коряшкіна, Т.О. Шевченко – Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наук. праць, 2008. – С.167-178.
3. **Коряшкіна Л.С.** Нові підходи до розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множини / Л.С. Коряшкіна, Т.О. Шевченко – Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наук. Праць, 2009. – С.220 – 231.
4. **Федоренко Р.П.** Приближенные методы решения задач оптимального управления. / Р.П. Федоренко – М., 1978.
5. **Капица С.П.** Общая теория роста человечества. / С.П. Капица – М., 1998.

Надійшла до редколегії 05.05.10