УДК 519.85

О.М. Кісельова, В.О. Строєва
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ БАГАТОПРОДУКТОВОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З РОЗТАШУВАННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

Розглядається неперервна нелінійна багатопродуктова задача оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору E_n на її неперетинні підмножини з розташуванням центрів при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей з опуклим цільовим функціоналом. Здійснено перехід від названої нескінченновимірної задачі оптимізації до задачі пошуку сідлової точки функціонала Лагранжа.

Рассматривается непрерывная нелинейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидового пространства E_n на его непересекающиеся подмножества с размещением центров при ограничениях в форме равенств и неравенств с выпуклым целевым функционалом. Выполнен переход от названной бесконечномерной задачи оптимизации к задаче поиска седловой точки функционала Лагранжа.

The continuous nonlinear multigrocery problem of optimum splitting of set Ω from n-dimensional Euclidean spaces E_n on its not crossed subsets with placing of the centres is considered at restrictions in the form of equalities and inequalities with convex target functional. Transition from named infinity-dimensional optimisation problems to a search problem saddle points functional Lagrangian is executed.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача, негладка оптимізація.

Вступ. Відомо, що до задач неперервного оптимального розбиття множин (ОРМ) зводиться широкий клас теоретичних та практичних задач оптимізації. Наприклад, це нескінченновимірні транспортні задачі, а також більш загальні – нескінченновимірні задачі розташування підприємств з одночасним розбиттям даного регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів. У ролі споживачів можуть бути телефонні абоненти, виборці, школярі, пацієнти для

діагностики захворювань та інші.

Розгляду саме нескінченновимірних задач розбиття потребують випадки з дуже великою кількістю споживачів. У даному разі розглядання дискретної моделі приводить до значних труднощів, що пов'язані з розмірністю таких задач. Також існують задачі, в яких множина, що розбивається, неперервна одразу. Наприклад, це задача знаходження областей притягання локальних мінімумів деякої багатоекстремальної функції. З іншої сторони, неперервні моделі цікаві тим, що вони породжують негладкі задачі оптимізації.

Дана робота присвячена подальшому розвиненню теорії неперервних задач ОРМ для випадку нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з розташуванням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей.

У [1] викладається математичну теорію неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) n-вимірного евклідового простору, які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними.

Запропонована в [1] математична теорія неперервних задач оптимального розбиття множин полягає у зведенні початкових нескінченновимірних задач оптимізації через функціонал Лагранжа до негладких, як правило, скінченновимірних задач. Для чисельного розв'язку яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційованої оптимізації, а саме різні варіанти r-алгоритму, розробленого в інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України під керівництвом Н. З. Шора.

У [2; 3] задачі з [1] узагальнюються на нелінійний випадок. Метою дослідження даної роботи є узагальнення однопродуктової нелінійної задачі ОРМ з розташуванням центрів при обмеженнях із [2; 3] на випадок багатопродуктової нелінійної задачі з розташуванням центрів при обмеженнях, постановка якої наведена в [4], а також теоретичне обґрунтування методу її розв'язання.

Постановка задачі. Розглянемо задачу з [4]. Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина у n-вимірному евклідовому просторі E_n. Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1^1,...,\Omega_N^1$; $\Omega_1^2,...,\Omega_N^2$;…;

© *О.М. Кісельова, В.О. Строєва, 2010*

$\Omega_1^M,...,\Omega_N^M$ із $\Omega \subset E_n$ назвемо можливим розбиттям множини,якщо $\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega,\ j = 1,2,...,M,$

$mes(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0,\ i \neq k,\ i,k = 1,...,N,$

$j = 1,...,M,$ де $mes(\cdot)$ – міра Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω через $\sum_{\Omega}^{N\times M}$, тобто

$$\Sigma_{\Omega}^{N\times M} = \left\{ \begin{array}{l} (\Omega_1^1,...,\Omega_N^1;...;\Omega_1^M,...,\Omega_N^M) : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega, \\ mes(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0,\ i \neq k,\ i,k = 1,...,N,\ j = 1,...,M \end{array} \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1^1,...,\Omega_N^1;\ \Omega_1^2,...,\Omega_N^2;...;\ \Omega_1^M,...,\Omega_N^M\},\{\tau_1,\tau_2,...,\tau_N\}) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i^j\left(\int_{\Omega_i^j} \rho^j(x)dx\right) + \int_{\Omega_i^j} c^j(x,\tau_i)\rho^j(x)dx\right].$$

Тут і у подальшому інтегралі розуміються у сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок підмножин $\Omega_i^j,\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M$ дорівнює нулю.

Функції $c^j(x,\tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega\times\Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)$ з Ω для будь-яких $i = 1,...,N;$; функції $\rho^j(x)$ – дійсні, обмежені, вимірні і невід'ємні на Ω для будь-яких $j = 1,...,M$; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)$ – задана точка підмножини Ω_i^j, одна й та ж для усіх $j = 1,...,M$, яку ми називаємо спільним центром підмножин $\Omega_i^1,...,\Omega_i^M$, не повинна належати кожному $\Omega_i^1,...,\Omega_i^M$; $\varphi_i^j(\cdot),\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M$ – дійсні, обмежені, опуклі, двічі неперервно-диференційовані функції свого аргументу.

Тоді під неперервною нелінійною багатопродуктовою задачею оптимального розбиття множини Ω з E_n на її неперетинні підмножини $\Omega_1^1,...,\Omega_N^1;\ \Omega_1^2,...,\Omega_N^2;...;\ \Omega_1^M,...,\Omega_N^M$ із знаходженням координат центрів підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей називатимемо наступну задачу.

Задача А.
$$\min_{(\{\Omega_1^1,...,\ \Omega_N^1;...;\Omega_1^M,...,\ \Omega_N^M\},\{\tau_1,...,\ \tau_N\})} F(\{\Omega_1^1,...,\ \Omega_N^1;...;\Omega_1^M,...,\ \Omega_N^M\},\{\tau_1,...,\ \tau_N\})$$

при обмеженнях
$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j} \rho^j(x)dx = b_i,\ i = 1,...,p,$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j} \rho^j(x)dx \le b_i,\ i = p+1,...,N,$$

$$\{\Omega_1,...,\Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^{N\times M},\ \tau = (\tau_1,...,\tau_N) \in \underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N} \in \Omega^N,$$

де $x = (x^{(1)},\ldots,\ x^{(n)}) \in \Omega;\ \tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right) \in \Omega;\ b_1,...,b_N$ – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язності задачі

$$S = M \cdot \int_{\Omega} \rho^j(x)dx \le \sum_{i=1}^{N} b_i,\ 0 < b_i \le S,\ i = 1,...,N \qquad (1)$$

Переформулюємо задачу А в термінах характеристичних функцій $\lambda_i^j(x)$ підмножин $\Omega_i^j,\ i = 1,...,\ N,\ j = 1,...,M$, а саме функцій виду:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \Omega_i^j, \\ 0,\ x \in \Omega \setminus \Omega_i^j, \end{cases} \quad i = 1,...,\ N,\ j = 1,...,M$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot),\tau) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i^j(\int_{\Omega} \rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx) + \int_{\Omega} c^j(x,\tau_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx]. \qquad (2)$$

де $\lambda(x) = (\lambda_1^1(x),...,\lambda_N^1(x);...;\lambda_1^M(x),...,\lambda_N^M(x))$.

Очевидно, що $I(\lambda(\cdot),\tau)=F(\{\Omega_1^1,...,\Omega_1^N;...;\Omega_1^M,...,\Omega_N^M\},\tau)$,

тоді *задача А* матиме вигляд:

Задача В. $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau)$,

де $\Gamma_1 = \{\lambda(x):\ \lambda(x)\in\Gamma_1'$ майже всюди (м.в.) для $x\in\Omega$;

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx=b_i,\ i=1,...,p,$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\le b_i,\ i=p+1,...,N,\};$$

$\Gamma_1' = \{\lambda(x)=(\lambda_1^1(x),...,\lambda_N^1(x);...;\lambda_1^M(x),...,\lambda_N^M(x)):\ \lambda_i^j(x)=0\vee 1$ м.в. для $x\in\Omega,\ i=1,...,N,\ j=1,...,M$,

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^j(x)=1\ \text{ м.в. для }\ x\in\Omega,\ j=1,...,M\ \};\ \tau=(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N.$$

Від нескінченновимірної *задачі В* математичного програмування з булевими значеннями змінних $\lambda_i^j(x)$, $i=1,...,N,\ j=1,...,M$ перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i^j(x)$ з відрізка $[0,1]$:

Задача С. $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_2\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau)$,

де $\Gamma_2 = \{\lambda(x):\ \lambda(x)\in\Gamma$ м.в. для всіх $x\in\Omega$;

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx=b_i,\ i=1,\ \dots,\ p,$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\le b_i,\ i=p+1,\ \dots,\ N\ \};$$

$\Gamma = \{\lambda(x)=(\lambda_1^1(x),...,\lambda_N^1(x);...;\lambda_1^M(x),...,\lambda_N^M(x)):\ 0\le\lambda_i^j(x)\le 1,\ \ x\in\Omega,\ i=1,...,N,\ j=1,...,M$,

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1\ \text{ м.в. для всіх }\ x\in\Omega\ \};\quad \tau=(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N.$$

Очевидно, $I(\lambda_*(\cdot),\tau_*)=\min\limits_{(\lambda,\tau)\in\Gamma_2\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau)=\min\limits_{\tau\in\Omega^N}\left(\min\limits_{\lambda(\cdot)\in\Gamma_2} I(\lambda(\cdot),\tau)\right)$ (3)

З результатів, отриманих в [1], [2] для аналогічної неперервної однопродуктової задачі оптимального розбиття множин з розташуванням центрів підмножин при кожному фіксованому $\tau\in\Omega^N$ та за узагальненою теоремою Вейерштрасса [5] внутрішня задача з (3) глобально розв'язна відносно $\lambda(\cdot)$ на обмеженій, замкненій, опуклій множині Γ_2 гільбертова простору $L_2^{N\times M}(\Omega)$.

Для обґрунтування методу розв'язку початкової задачі розглянемо для *задачі С* функціонал Лагранжа:

$$h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi)=I(\lambda(\cdot),\tau)+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\left[\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx-b_i\right]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i^j(\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)+\int_{\Omega}(c^j(x,\tau_i)+\psi_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx] \qquad (4)$$

де $\psi=(\psi_1,...,\psi_N)$ – N-вимірний вектор з дійсними компонентами, при чому $\psi_1,...,\psi_p$ – довільного знаку, а $\psi_{p+1},...,\psi_N$ – невід'ємні; $\lambda(x)\in\Gamma$ для $x\in\Omega$; $\tau=(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N$.

$\left(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*\right)$ – назвемо сідловою точкою функціонала (4) на множині $\left\{\Gamma\times\Omega^N\right\}\times\Lambda$, де $\Lambda=\left\{\psi=\left(\psi_1...\psi_N\right)\in E_N:\psi_i\ge 0,i=p+1,...,N\right\}$, якщо

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi)\le h\left(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*\right)\le h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi^*\right) \qquad (5)$$

для будь-яких $\lambda(x)\in\Gamma$, $\tau\in\Omega^N$, $\psi\in\Lambda$.

Також можна записати: $h\left(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*\right)=$

$$=\max_{\psi\in\Lambda}\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\max_{\psi\in\Lambda} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right), \qquad (6)$$

або $$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi^*)=\max_{\Psi\in\Lambda} h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi) \qquad (7)$$

Без доведення існування сідлової точки перейдемо до розв'язання задачі $\max_{\psi\in\Lambda}\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right)$.

Якщо позначити $G(\psi)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right),\ \psi\in\Lambda,$

то двоїстою до *задачі С* буде задача:

$$G(\psi)\to\max,\ \psi\in\Lambda \qquad (8)$$

Для знаходження $\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right)$

розглянемо $\min_{\tau\in\Omega^N}\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right)$ при $\psi\in\Lambda$. (9)

Позначимо в (9) $$G_1(\tau,\psi)=\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right),\ \tau\in\Omega^N,\ \psi\in\Lambda \qquad (10)$$

Підставимо в (10) вираз для $h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right)$ з (4), тоді отримаємо

$$G_1(\tau,\psi)=$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i^j(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)+\int_\Omega(c^j(x,\tau_i)+\psi_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx] \qquad (11)$$
$$\tau\in\Omega^N,\psi\in\Lambda.$$

Узагальнюючи результати, отримані в [1], [2], на випадок багатопродуктової нелінійної задачі, мінімальне значення по $\lambda(\cdot)$ функціоналу $h\left(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi\right)$ досягається для кожних $\tau\in\Omega^N$ і $\psi\in\Lambda$ при

$$(\lambda_1^1(x),\ldots,\lambda_i^j(x),\ldots,\lambda_N^M(x))=(\lambda_{*1}^1(x),\ldots,\lambda_{*i}^j(x),\ldots,\lambda_{*N}^M(x)),$$

де

$$\lambda_{*i}^j(x)=\begin{cases}1,\ c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^j_{iY_i^j}(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_{*i}^j(x)dx)\le c^j(x,\tau_k)+\psi_k+\varphi'^j_{kY_k^j}(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_{*k}^j(x)dx),\\ i\ne k\ \text{м.в. для}\ x\in\Omega\ (\text{іншими словами},\ i=k\ \text{тільки на множині міри нуль},\\ \text{тобто у точках границі між підмножинами}\ \Omega_i^j\ \text{та}\ \Omega_k^j)\\ i,k=1,\ldots,N,\\ 0,\quad \text{в інших випадках}.\end{cases} \qquad (12)$$
$$j=1,\ldots,M,$$

а функціонал $G_1(\tau,\psi)$ приймає вигляд

$$G_1(\tau,\psi)=$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\left(\varphi_i^j(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)-\varphi'^j_{iY_i^j}(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)\cdot\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\right)+\\ +\int_\Omega\left(c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^j_{iY_i^j}(\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)\right)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\end{array}\right], \qquad (13)$$
$$\tau\in\Omega^N,\psi\in\Lambda$$

де $Y_i^j=\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx$

Підставляючи вираз для $\lambda_{*i}^j(x)$ з (12) в ту частину формули (13), яка лінійно залежить від $\lambda(\cdot)$ та залишаючи поки що змінною величину Y_i^j, $i=1,\ldots,N,\ j=1,\ldots,M$, отримаємо наступний вираз для $G_1(\tau,\psi)$

$$G_2(Y,\tau,\psi)=-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\varphi_i^j(Y_i^j)-\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}(Y_i^j)\cdot Y_i^j\right)+\int_{\Omega}\min_{k=1,N}\left(c^j(x,\tau_k)+\psi_k+\varphi'^{\,j}_{kY_k^j}(Y_k^j)\right)\rho^j(x)dx\right], \tag{14}$$
$$\tau\in\Omega^N,\psi\in\Lambda,Y\in U=\left\{Y=(Y_1^1,...,Y_N^1;...;Y_1^M,...,Y_N^M)\in E_{N\times M}:0\le\sum_{j=1}^{M}Y_i^j\le b_i,i=1,...,N\right\}$$

Таким чином, двоїста задача (8) має вигляд:

$$\max_{\psi\in\Lambda}\min_{\tau\in\Omega^n}\max_{Y\in U}G_2(Y,\tau,\psi) \tag{15}$$

Враховуючи вище приведене та узагальнюючи на випадок *задачі С* результати, отримані в [1], [2] для аналогічної неперервної однопродуктової задачі оптимального розбиття множин з розташуванням центрів підмножин, можна зробити висновок, що має місце теорема Куна-Таккера у двоїстій формі, тобто $I(\lambda_*(\cdot),\tau_*)=G(\psi^*)$, де $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)$ - оптимальний розв'язок задачі С, ψ^* - оптимальний розв'язок задачі (15), при чому максимум у двоїстій задачі (15) досягається.

Сформулюємо теорему, яка підсумовує наші розсуди та зумовлює перехід від нескінченновимірної *задачі С* до пошуку сідлової точки функціонала (4).

Теорема 1. *Нехай* $\varphi_i^j(\cdot)$, $i=1,...,N$, $j=1,...,M$ *– опуклі, двічі неперервнодиференційовані функції свого аргументу та при кожних фіксованих* $\tau\in\Omega^N$ *і* $\psi\in\Lambda$ *має місце умова*

$$mes\left\{x\in\Omega:\left(c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}\left(\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda^{*j}_i(x)dx\right)\right)\rho^j(x)=0\right\}=0,\quad i=1,...,N,$$

тоді сідлова точка $\left(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*\right)$ *функціонала (4) для* $i=1,...,N$ *та майже всіх* $x\in\Omega$ *визначається наступним чином:*

$$\lambda^j_{*i}(x)=\begin{cases}1, & при\ \ x\in\Omega^j_{*i}\ \ та\ \ x\notin\Omega^j_{*q},\ q\le i,\\ 0, & при\ \ x\notin\Omega^j_{*i},\end{cases}\qquad i=1,...,N,\ j=1,...,M$$

де
$$\Omega^j_{*i}=\left\{\begin{array}{l}x\in\Omega:c^j(x,\tau_i^*)+\psi_k^*+\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}(Y_i^{*j})=\\ =\min\limits_{k=\overline{1,N}}(c^j(x,\tau_k^*)+\psi_k^*+\varphi'^{\,j}_{kY_k^j}(Y_k^{*j})),\ i\ne k\ \ м.с.\ для\ x\in\Omega\end{array}\right\},$$

в якості $Y_1^{*j},...,Y_N^{*j}$, $\tau_1^*,...,\tau_N^*$, $\psi_1^*,...,\psi_N^*$ *обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (8), приведеної до виду*

$$G(\psi)=\min_{\tau\in\Omega^n}\max_{Y\in U}G_2(Y,\tau,\psi)=\min_{\tau\in\Omega^N}\max_{Y\in U}\left\{\sum_{i=1}^{N}-\psi_i b_i+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\varphi_i^j(Y_i^j)-\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}(Y_i^j)\cdot Y_i^j\right)+\int_{\Omega}\min_{k=\overline{1,N}}\left(c^j(x,\tau_k)+\psi_k+\varphi'^{\,j}_{kY_k^j}(Y_k^j)\right)\rho^j(x)dx\right]\right\}\to\max,$$

$$при\ умовах\ \ \psi_i\ge 0,\quad i=p+1,...,N.$$

Висновки. Сформульована неперервна багатопродуктова нелінійна задача оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідова простору E_n на її неперетинні підмножини з розташуванням центрів цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей у випадку опуклого цільового функціоналу. Здійснено перехід від названої нескінченновимірної задачі оптимізації до задачі пошуку сідлової точки функціонала Лагранжа.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н. З. Шор – К., 2005. – 564с.
2. **Киселёва Е. М.** Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала / Е. М. Киселёва, М. С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. – К., 2008. – № 2. – С. 134–152.
3. **Кісельова О. М.** Теорема Куна-Таккера для нелінійної неперервної задачі оптимального розбиття множин / О. М. Кісельова, М. С. Дунайчук // Математичне моделювання., 2007. – №2(17). – С. 41–45.
4. **Киселёва Е. М.** Об алгоритме решения непрерывной нелинейной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселёва, М. С. Дунайчук // Математика. Компьютер. Образование : XV междунар. конф., г. Дубна, 28 янв. – 2 фев., 2008 г. : тезисы докл. – М. – И. – 2008. – С.445.

5. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. / Ф. П. Васильев – М., 1981. – 400 с.
Надійшла до редколегії 26.05.10