УДК 519.8

Т.О. Шевченко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ З РУХОМИ ГРАНИЦЯМИ І ЦЕНТРАМИ ПІДМНОЖИН

Розглядається динамічна задача оптимального розбиття деякої місцевості «гірського» типу на підобласті. Одночасно, центри підобластей, рухаючись із початкових положень по поверхні заданої місцевості, повинні дістатись пунктів призначення найкоротшим шляхом. Запропоновано та обгрунтовано метод розв'язання представленної задачі.

Рассматривается динамическая задача оптимального разбиения некоторой местности «горного» типа на подобласти. Одновременно, центры подобластей, двигаясь из начальных положений по поверхности заданной местности, должны добраться в пункты назначения кратчайшим образом. Предложено и обосновано метод решения представленной задачи.

The dynamic problem of a certain rock type area partitioning to the subsets is considered. Simultaneously the centers of subsets moving from initial points by surface of that area must get finisf points by shortest way. The method of cited problem is offered and justified.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин (ОРМ), динамічна задача ОРМ, фазова траєкторія, оптимальне керування.

Вступ. Неперервні задачі оптимального розбиття множин, які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування, детально досліджені у монографії [1]. В [1] зазначено, що одним з напрямів розвитку теорії неперервних задач ОРМ, є дослідження динамічних задач. У [2] дається огляд основних напрямків розвитку таких задач. Згідно з [2] є три основні типи урахування динаміки в задачах ОРМ:

1) коли цільовий функціонал задачі залежить від функцій попиту і вартості, які є фазовими траєкторіями деякої заданої керованої системи [3];
2) коли виконується п.1 і швидкість змінення функції попиту в кожній точці множини, що розглядається, залежить від

© *Т.О. Шевченко, 2011*

приналежності цієї точки до поточної підмножини, яка залежить від часу [4];

3) коли виконується п.2 і центри підмножин змінюються з часом або за деяким заданим законом, або підлягають керуванню.

У даній роботі наведена постановка задачі, що відтворює варіант у 3), тобто динамічної задачі оптимального розбиття множини на підмножини, границі яких можуть рухатися з часом під впливом деякого керування; центри підмножин також є рухомими і потребують оптимального у певному сенсі переводу із початкових точок у задані. Передбачається, що центри – це проекції точок, що рухаються по заданій поверхні. Запропоновано та обгрунтовано метод розв'язання такої задачі.

Постановка задачі. Нехай задано набір функцій $u_i(x,t) \in L_2(\Omega \times [0,T]),\ i = \overline{1,N},$ де $\Omega \subset R^2$ – обмежена, вимірна за Лебегом множина. Через $P_N(\Omega)$ позначимо клас всіляких розбиттів множини Ω на N підмножин, що не перетинаються

$$P_N(\Omega) = \left\{ \overline{\omega} = (\Omega_1,...,\Omega_N) :\ \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,N} \right\}.$$

Дозволимо границям між підмножинами мінятися з часом і позначимо через $\overline{\omega}(t) = (\Omega_1(t),...,\Omega_N(t))$ розбиття множини Ω, що відповідає моменту часу t і визначає зміну стану $\rho(x,t)$ деякої системи так, що $\forall x \in \Omega_i(t)$ виконується

$$\dot{\rho}(x,t) = \rho(x,t) + u_i(x,t) + f(x,t), \quad \forall t \in [0,T],\ i = \overline{1,N},$$
$$\rho(x,0) = \rho_0(x). \tag{1'}$$

Нехай на множині Ω задана деяка поверхня функцією $\mu(x)$.

З кожною підмножиною $\Omega_i(\cdot)$ будемо пов'язувати точку $\tau_i \in \Omega,\ i = \overline{1,N},$ – її «центр», який в свою чергу може змінювати своє місце розташування за законом

$$\ddot{\tau}_{1i}(t) = a_i(t)\cos\varphi_i(t),$$
$$\ddot{\tau}_{2i}(t) = a_i(t)\sin\varphi_i(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2'}$$

$$\begin{aligned}(\tau_i(0),\dot\tau_i(0)) &= (\tau_i^0, v_i^0),\\ (\tau_i(T),\dot\tau_i(T)) &= (\tau_i^T, 0),\end{aligned} \quad i=\overline{1,N}. \tag{3'}$$

і є проекцією деякої точки $(\tau_{1i},\tau_{2i},\tau_{3i})$, де $\tau_{3i}=\mu(\tau_{1i},\tau_{2i})$, на множину Ω. Одже, деякі точки $(\tau_{1i},\tau_{2i},\tau_{3i})$ рухаються поверхнею $\mu(x)$ під впливом керувань $a_i(t)$ та $\varphi_i(t)$ їхніми проекціями. Такі точки будемо називати «рухомими», а їх проекції на множину Ω – «рухомими центрами» підмножин $\Omega_i(\cdot)$.

Потрібно визначити такі функції $\overline{\omega}^*(t)=(\Omega_1^*(t),...,\Omega_N^*(t)$ розбиття множини Ω на N неперетинних підмножин $\overline{\omega}^*(t)=(\Omega_1^*(t),...,\Omega_N^*(t))$, $t\in[0,T]$, такі функції керування $a_i(t)$ та $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$, і відповідний закон руху «рухомих центрів» підмножин множиною Ω, при яких функціонал

$$J(\overline{\omega}(\cdot),\tau(\cdot))=\gamma_0\int_0^T\sum_{i=1}^N\int_{\Omega_i(t)}\left[\left(c(x,\tau_i(t),t)+A_i\right)\rho(x,t;\overline{\omega}(t))+u_i^2(x,t)\right]dxdt+$$
$$+\gamma_1\left\{\sum_{i=1}^N\int_{\tau_i(0)}^{\tau_i(T)}dL_i+\int_0^T\sum_{i=1}^N a_i^2(t)dt\right\} \tag{4'}$$

досягав би свого найменшого значення, за умов (2')-(3').

Тут $\gamma_0,\gamma_1\ge 0$ – константи, які визначають приорітет відповідного доданку; A_i, $i=\overline{1,N}$, – фіксовані величини; $c(x,\tau_i(t),t)$ – задана функція, L_i – довжина i-ї кривої (траєкторії руху i-ї «рухомої точки» по поверхні $\mu(x)$), що з'єднує точку, з якої починається рух, τ_i^0, та кінцеву точку τ_i^T; $\tau_i(t)\in\Omega$, $i=\overline{1,N}$, – «рухомі центри» підмножин, якими треба керувати оптимальним чином за допомогою функцій $a_i(t)$ та $\varphi_i(t)$,

$i=\overline{1,N}$; $T>0$ – фіксована тривалість керованого процесу; функція $\rho(x,t)$ є розв'язком задачі Коші (1'); $f(x,t),\rho_0(x)$ – відомі функції своїх аргументів.

Опис методу розв'язання поставленої задачі ОРМ. Перший доданок функціоналу (4') – це цільовий функціонал, наведений в [4], задачі ОРМ з рухомими границями між підмножинами. Другий доданок функціоналу (4') містить суму криволінійних інтегралів першого роду.

Введемо наступні позначення

$$\dot{\tau}_{1i}(t)=v_{1i}(t),$$
$$\dot{\tau}_{2i}(t)=v_{2i}(t), \qquad t\in[0,T],\ i=\overline{1,N},$$

тоді умови (2') та (3') перепишуться, відповідно, у вигляді

$$\begin{aligned}&\dot{\tau}_{1i}(t)=v_{1i}(t),\\ &\dot{v}_{1i}(t)=a_i(t)\cos\varphi_i(t), \qquad t\in[0,T],\ i=\overline{1,N},\\ &\dot{\tau}_{2i}(t)=v_{2i}(t),\\ &\dot{v}_{2i}(t)=a_i(t)\sin\varphi_i(t),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\tau_i(0)=\left(\tau^0_{1i},\tau^0_{2i}\right), \quad v_i(0)=\left(v^0_{1i},v^0_{2i}\right),\\ &\tau_i(T)=\left(\tau^T_{1i},\tau^T_{2i}\right), \quad v_i(T)=(0,0),\end{aligned}\ i=\overline{1,N}. \tag{3}$$

Зведемо криволінійний інтеграл першого роду в (4') до звичайного інтегралу:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i(0)}^{\tau_i(T)}dL_i=\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\sqrt{\dot{\tau}^2_{1i}(t)+\dot{\tau}^2_{2i}(t)+\dot{\tau}^2_{3i}(t)}dt=\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\sqrt{v^2_{1i}(t)+v^2_{2i}(t)+\mu^2(\tau_{1i}(t),\tau_{2i}(t))}dt$$

.

Фізичний зміст криволінійного інтегралу першого роду – це маса кривої, яку ми і будемо мінімізувати.

Користуючись тими ж міркуваннями, що і у [4] перепишемо розглянуту задачу у вигляді задачі оптимального керування і одразу введемо характеристичні функції підмножин. Отримаємо наступну задачу

$$J(\lambda(\cdot,\cdot),\tau(\cdot)) = \gamma_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left[\left(c(x,\tau_i(t),t) + A_i \right) \rho(x,t) + u_i^2(x,t) \right] \lambda_i(x,t)\,dx\,dt +$$
$$+ \gamma_1 \left\{ \sum_{i=1}^N \int_0^T \sqrt{v_{1i}^2(t) + v_{2i}^2(t) + \mu^2(\tau_{1i}(t),\tau_{2i}(t))}\,dt + \right.$$
$$\left. + \int_0^T \sum_{i=1}^N a_i^2(t)\,dt \right\} \to \min_{\lambda \in \Lambda_1},$$

$$\Lambda_1(t) = \{ \lambda(x,t) = (\lambda_1(x,t),\ldots,\lambda_N(x,t)) : \quad 0 \le \lambda_i(x,t) \le 1, \ i = \overline{1,N},$$
$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x,t) = 1, \text{ майже для всіх } x \in \Omega \}, \quad t \in [0,T],$$
$$\dot{\rho}(x,t) = \rho(x,t) + u(x,t;\overline{\omega}(t)) + f(x,t), \quad u \in U(t), \quad t \in [0,T],$$
$$\rho(x,0) = \rho_0(x). \tag{4}$$

(1)

за умов (2), (3).

Тут

$$U(t) = \{ u(x,t;\overline{\omega}(t)) : \ u(x,t;\overline{\omega}(t)) = u_i(x,t) \text{ майже для всіх}$$
$$x \in \Omega_i(t), i = \overline{1,N}; \quad \overline{\omega}(t) = (\Omega_1(t),\ldots,\Omega_N(t)) \in P_N(\Omega) \}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Задача (1-4) є задачею оптимального керування, в якій присутньо два вида керування: 1) керування границями підмножин – вектор-функція $\lambda(\cdot,\cdot)$; 2) керування «рухомими центрами» підмножин – вектор-функції $a(t)$ та $\varphi(t)$, тобто на скільки треба зміщуватися і під яким кутом, відповідно.

Умови оптимальності мають наступний вигляд:

а) стаціонарність за $\tau_1(t), \tau_2(t), v_1(t), v_2(t), \rho(x,t)$:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \tau_1},$$
$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial v_1},$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \tau_2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial v_2},$$

$$\frac{\partial \Psi_5}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \rho},$$

$$\forall x \in \Omega,$$

де функція Гамільтона-Понтрягіна має вид

$$H(\lambda(x,t);\tau_1(t),\tau_2(t),v_1(t),v_2(t),\rho(x,t);\Psi_1(t),\Psi_2(t),\Psi_3(t),\Psi_4(t),\Psi_5(x,t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\Psi_{1i}(t)v_{1i}(t) + \Psi_{2i}(t)a_i(t)\cos\varphi_i(t) + \Psi_{3i}(t)v_{2i}(t) + \Psi_{4i}(t)a_i(t)\sin\varphi_i(t)\right) +$$

$$+ \int_{\Omega} (\rho(x,t) + \sum_{i=1}^{N} u_i(x,t)\lambda_i(x,t) + f(x,t))\Psi_5(x,t)dx -$$

$$- \gamma_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} ((c(x,\tau_i,t) + a_i)\rho(x,t) + u_i^2(x,t))\lambda_i(x,t)dx -$$

$$- \gamma_1 \sum_{i=1}^{N} \sqrt{v_{1i}^2(t) + v_{2i}^2(t) + \mu^2(\tau_{1i}(t),\tau_{2i}(t))};$$

б) трансверсальність за $\rho(\cdot,\cdot)$: $\forall x \in \Omega$

$$\psi_5(x,T) = 0; \tag{6}$$

в) оптимальність за $a(\cdot)$:

$$a^*(t): \quad \max_a H(\lambda(\cdot,\cdot),\tau(\cdot),v(\cdot),\rho(\cdot,\cdot),\Psi_1(\cdot),\Psi_2(\cdot),\Psi_3(\cdot),\Psi_4(\cdot),\Psi_5(\cdot,\cdot)),$$

тобто

$$a_i(t) = \frac{\psi_{2i}(t)\cos\varphi_i(t) + \psi_{4i}(t)\sin\varphi_i(t)}{2}; \tag{7}$$

оптимальність за $\varphi(\cdot)$:

$$\varphi^*(t): \quad \max_{\varphi} H(\lambda(\cdot,\cdot),\tau(\cdot),v(\cdot),\rho(\cdot,\cdot),\Psi_1(\cdot),\Psi_2(\cdot),\Psi_3(\cdot),\Psi_4(\cdot),\Psi_5(\cdot,\cdot)),$$

тобто

$$\varphi_i(t) = arctg\frac{\psi_{4i}(t)}{\psi_{2i}(t)}; \tag{8}$$

оптимальність за $\lambda(\cdot,\cdot)$:

$$\lambda^*(x,t): \quad \max_{\lambda\in\Lambda_1} H(\lambda(\cdot,\cdot),\tau(\cdot),\nu(\cdot),\rho(\cdot,\cdot),\Psi_1(\cdot),\Psi_2(\cdot),\Psi_3(\cdot),\Psi_4(\cdot),\Psi_5(\cdot,\cdot))\cdot$$

Враховуючи структуру множини Λ_1 можна записати: $\forall x\in\Omega,\ t\in[0,T]$

$$\lambda_i^*(x,t) = \begin{cases} 1, & q_i(x,\tau_i,t) = \max\limits_{k=1,N} q_k(x,\tau_k,t), \\ 0, & в\ усіх\ інших\ випадках; \end{cases} \tag{9}$$

де

$$q_i(x,\tau_i,t) = u_i(x,t)\Psi_5(x,t) - \gamma_0\left[(c(x,\tau_i,t)+a_i)\rho(x,t) - u_i^2(x,t)\right]$$

Для чисельного розв'язання отриманої крайової задачі побудовано алгоритм на основі методу Ньютона.

Результати експеременті в. Розглянемо наступну поверхню $\mu(x) = 80e^{-12(x_1-0.9)^2-7(x_2-1.3)^2} + 280e^{-8(x_1-1.8)^2-11(x_2-2)^2}$, графічне зображення (рис. 1, 2):

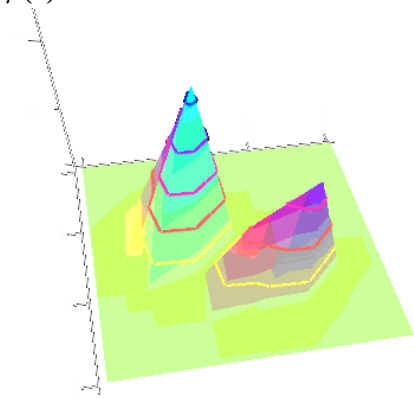


Рис.1. Поверхня $\mu(x)$

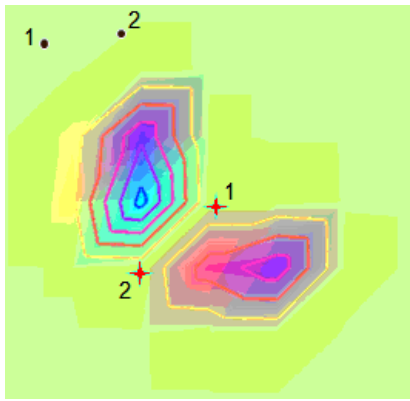
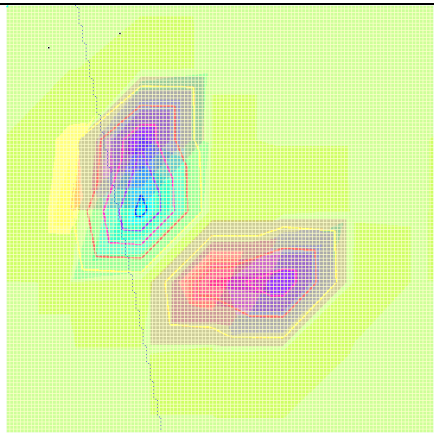


Рис.2. Лінії рівня

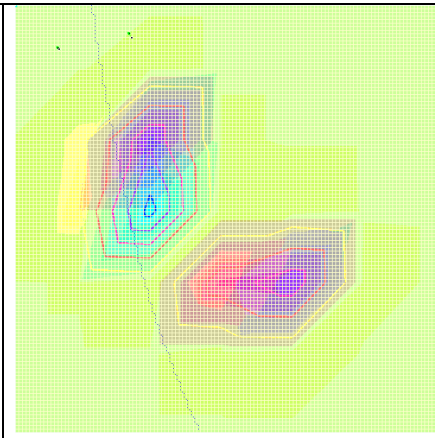
В таблиці 1 наведені результати роботи алгоритму для обраних фіксованих параметрів задачі. Алгоритм було реалізовано на мові Pascal у середовищі Delphi 7.

Табл. 1.

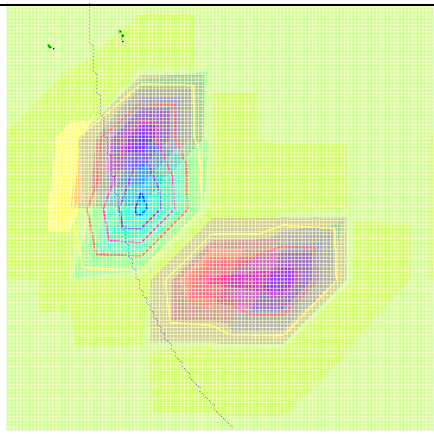
Обрані стани динамічної системи



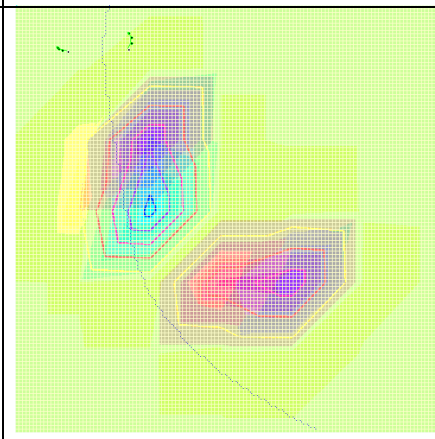
t=0



t=1

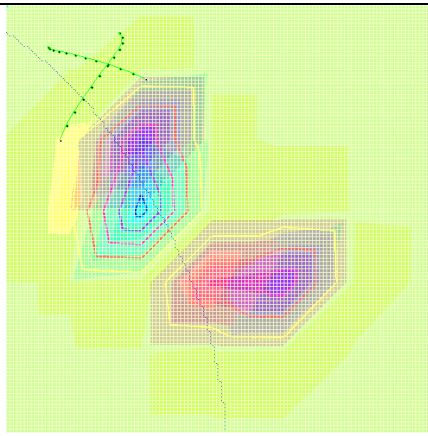
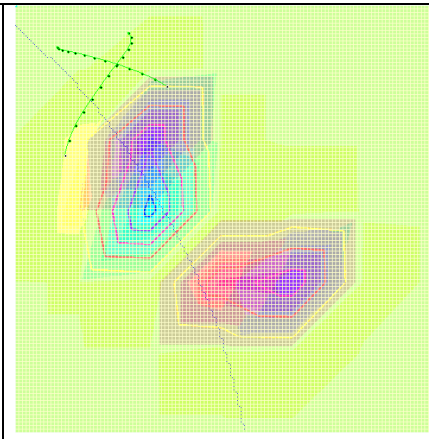
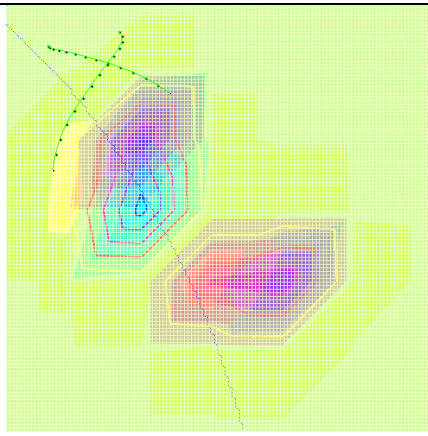
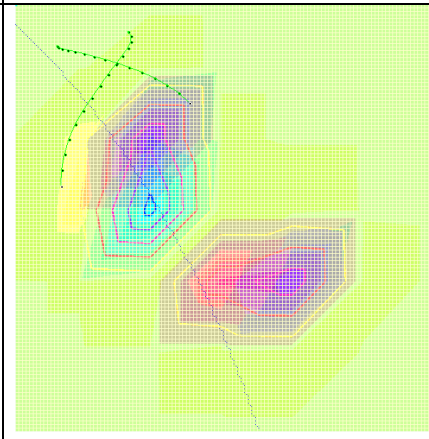


t=2

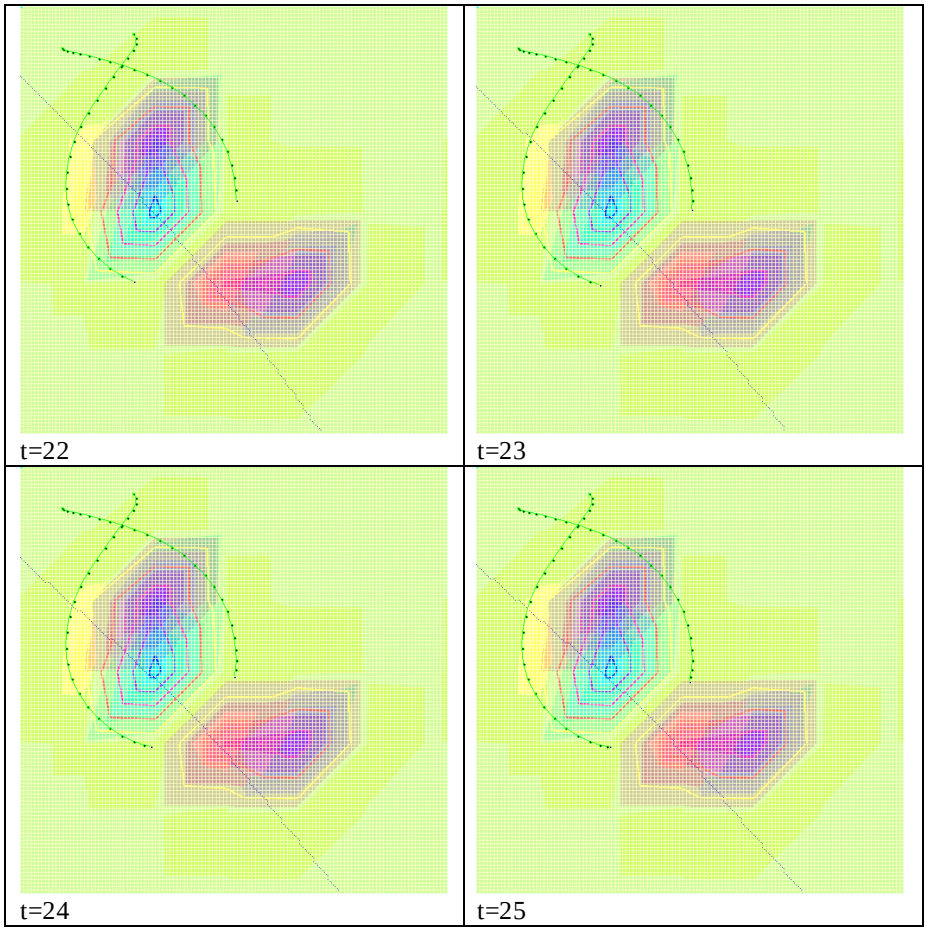


t=3

Продовження таблиці 1

 t=11	 t=12
 t=13	 t=14

Продовження таблиці 1



В даному прикладі було взято такі параметри:

$r_1(0)=(0.3,0.3), r_2(0)=(0.8,0.2)$
$r_1(T)=(1.5,1.5), r_2(T)=(1,2)$

$$\Omega = [0,3]\times[0,3]$$

$$\rho_0(x) = 1$$

$$u_i(t) = a_i t + b_i, \quad i = 1,2.$$

$$a_1 = 0.1, \quad b_1 = 0$$

$$a_2 = 0.3, \quad b_2 = 0$$

$$v_1(0) = (0.1, 0.1),\ v_2(0) = (0.3, 0.2)$$

$$\mu(x) = 80e^{-12(x_1-0.9)^2-7(x_2-3.3)^2} + \\ + 280e^{-8(x_1-3.8)^2-11(x_2-2)^2}$$

$$T = 2.5$$

Висновки. У роботі запропоновано і обґрунтовано метод розв'язання динамічної задачі ОРМ з рухомими границями і центрами підмножин. На основі запропонованого методу розв'язання задачі побудовано відповідний алгоритм її розв'язання, роботу якого реалізовано за допомогою створеного програмного забезпечення і перевірено на деяких тестових моделях. Треба зауважити також, що з прикладної точки зору такі задачі розбиття виникають при моделюванні ситуацій які виникають при пересуванні певних об'єктів гірською місцевістю.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е. М. Киселева, Н. З. Шор – К., 2005. – 564 с.
2. **Кісельова О.М.** Напрямки розвитку динамічних задач оптимального розбиття множин. / О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, Т.О. Шевченко // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 12-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2010, Київ, 25-29 травня 2010р. – К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ» 2010. – С. 98.
3. **Коряшкіна Л.С.** Нові підходи до розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множин / Л.С. Коряшкіна, Т.О. Шевченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ 2009, – С. 220-231.
4. **Коряшкіна Л.С.** Особливості розвязку задачі оптимального розбиття множин з рухомими границями між підмножинами / Л.С. Коряшкіна, Т.О. Шевченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ 2008, – С. 167-178.*Надійшла до редколегії 07.06.11*