УДК 519.6

Л.Л. Гарт
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Досліджується питання про існування, область розташування та наближення розв'язку нелінійного операторного рівняння, що залежить від числового параметра, у банаховому просторі за допомогою проекційно-ітераційного методу, основаного на методі Ньютона-Канторовича. Доведено відповідні теореми, отримано оцінки похибки.

Исследуется вопрос о существовании, области расположения и приближении решения нелинейного операторного уравнения, зависящего от числового параметра, в банаховом пространстве при помощи проекционно-итерационного метода, основанного на методе Ньютона-Канторовича. Доказаны соответствующие теоремы, получены оценки погрешности.

The problem of existence, a location domain and approximation of solution of a nonlinear operatoral equation with a numerical parameter in Banach space is investigated with applying the projection-iteration method based on Newton-Kantorovich method. Corresponding theorems are proved, error estimates are obtained.

Ключевые слова: нелинейное операторное уравнение, параметр, решение, метод Ньютона-Канторовича, проекционно-итерационный метод, сходимость, последовательность, приближение, погрешность.

Введение. Метод решения функциональных уравнений, известный под названием метода Ньютона-Канторовича (метода Ньютона или касательных – в случае вещественных уравнений), а также некоторые его модификации являются в настоящее время одними из немногих, применяемых на практике для фактического нахождения решения нелинейного функци-онального уравнения. Важно отметить и теоретическое значение метода, так как с его помощью можно делать заключение о существовании, единственности и области расположения решения уравнения, не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем фактическое знание решения. Исследованию метода Ньютона-Канторовича и его модификаций посвящены работы Л.В. Канторовича [1, 2], И.П. Мысовских [3], Б.А. Вертгейма, С. Фенга и других авторов. Для решения нелинейных функциональных уравнений применяются также линеаризованные одношаговые методы скорейшего спуска, с минимальными невязками, с минимальными ошибками [4], методы касательных парабол и касательных гипербол [5], методы типа Чебышева и др., относящиеся к классу итерационных методов, а также группа проекционных (аппроксимационных) методов.

Впервые общая теория проекционных методов для решения операторных уравнений второго рода в банаховых пространствах была построена Л.В. Канторовичем в [1]. Общая теория проекционных методов решения уравнения первого рода

$$A x = f \tag{1}$$

с нелинейным оператором A, действующим из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, изложена в работах В.В. Петришина [6] и Ф. Браудера. В работе С.Д. Балашовой [7] проведены исследования методов, получивших название проекционно-итерационных, для решения линейных и нелинейных уравнений первого рода, основанных на следующей идее. Исходное операторное уравнение вида (1) аппроксимируется последовательностью приближенных уравнений:

$$A_n x_n = f_n, \quad n = 1,2,..., \tag{2}$$

где каждый из операторов A_n переводит X_n в Y_n, $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ – возра-стающие последовательности подпространств X и Y соответственно. К решению этих уравнений применяется некоторый итерационный метод, причем для каждого из приближенных уравнений находится по указанному методу лишь несколько приближений $x_n^{(k)}$ ($k = 1,2,..k_n$), последнее из которых полагается равным начальному приближению в итерационном процессе для следующего, ($n+1$)-го приближенного уравнения. В качестве последовательности приближений к решению исходного уравнения принимается последовательность $\left\{x_n^{(k_n)}\right\}$. Такой подход к нахождению приближенного решения того или иного уравнения, естественно, устраняет трудности, возникающие при решении того же уравнения обычным проекционным методом и облегчает выбор подходящего начального приближения (особенно в нелинейном случае) по сравнению с решением исходного уравнения итерационным методом.

Постановка задачи. Пусть в уравнении (1) A – дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, переводящий открытое множество Ω банахова пространства X в банахово пространство Y. Предположим, что в Ω содержится решение x^* уравнения (1).

Возьмем произвольный элемент $x^{(0)} \in \Omega$. Предполагая, что производная Фреше $A'(x)$ непрерывна в замкнутом шаре $S(x^{(0)}, R) \subset \Omega$, из формулы конечных приращений получим, что в достаточно малой

© *Л.Л. Гарт, 2011*

окрестнос-ти $x^{(0)}$ элемент Ax достаточно близок к $Ax^{(0)} + A'(x^{(0)})(x - x^{(0)})$ и, следовательно, решение уравнения $Ax^{(0)} + A'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = f$ достаточно близко к x^*. Это уравнение линейно, и если существует $\left[A'(x^{(0)})\right]^{-1}$, то его решение $x^{(1)}$ находится по формуле $x^{(1)} = x^{(0)} - \left[A'(x^{(0)})\right]^{-1}\left(Ax^{(0)} - f\right)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность приближений

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[A'(x^{(k)})\right]^{-1}\left(Ax^{(k)} - f\right), \quad k = 0,1,... \tag{3}$$

к решению x^* уравнения (1), определяющую итерационный метод Ньютона-Канторовича [2].

Теорема о сходимости метода Ньютона-Канторовича при условиях типа Коши, когда оценка нормы оператора $\Gamma(x) = \left[A'(x)\right]^{-1}$ известна не только в точке $x^{(0)}$, но и во всем шаре $S(x^{(0)}, R)$ (что позволяет ослабить ограничения, накладываемые на выбор $x^{(0)}$), доказана в [3]. Обобщением упомянутой теоремы, когда вместо оператора $\Gamma(x) = \left[A'(x)\right]^{-1}$ требуется лишь существование в $S(x^{(0)}, R)$ оператора $D(x)$, близкого к $\Gamma(x)$, является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть оператор A дифференцируем по Фреше в некотором шаре $S(x^{(0)}, R)$ и его производная на этом шаре удовлетворяет условию Липшица*

$$\left\|A'(x) - A'(y)\right\| \le L\left\|x - y\right\|, \quad L = const > 0. \tag{4}$$

Пусть существует линейный оператор $D(x)$, отображающий Y в X и имеющий непрерывный обратный, причем для всех $x \in S(x^{(0)}, R)$

$$\left\|D(x)\right\| \le b, \tag{5}$$

$$\left\|D(x)A'(x) - I\right\| \le \delta < 1. \tag{6}$$

Если начальное приближение $x^{(0)}$ удовлетворяет условиям

$$\left\|Ax^{(0)} - f\right\| \le \eta^{(0)}, \tag{7}$$

$$h^{(0)} = \frac{b^2\eta^{(0)}L}{(1-\delta)^2} < 2, \quad r = \frac{b\eta^{(0)}G}{1-\delta} \le R, \quad G = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{h^{(0)}}{2}\right)^{2^i - 1}, \tag{8}$$

то уравнение (1) имеет в шаре $S(x^{(0)}, r)$ решение x^*, к которому сходится процесс Ньютона-Канторовича (3) с оценкой погрешности

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{b\eta^{(0)}}{1-\delta} G\left(\frac{h^{(0)}}{2}\right)^{2^k - 1}.$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в [8]. Там же сформулированы условия, на основании которых можно судить о разрешимости уравнения (1) по решению уравнения

$$Ax \equiv Tx + Qx = f,$$

близкого к нему, но уже более простого (также, вообще говоря, нелинейного), где T и Q – некоторые дифференцируемые по Фреше операторы, действующие из X в Y.

Такая ситуация является частным случаем более общей, когда левая часть уравнения (1) зависит от числового или иного параметра, причем при одном значении параметра решение уравнения известно и требуется установить существование решения для значений параметра, близких к начальному. Предположим, что упомянутый параметр входит в уравнение линейно, то есть будем рассматривать операторное уравнение вида

$$Ax(\mu) \equiv Tx + \mu Qx = f, \tag{9}$$

где μ означает линейный оператор в пространстве Y, в частности, μ может быть числовым множителем.

Метод решения. Условия существования и область расположения решения $x^* \equiv x^*(\mu)$ уравнения (9), а также условия сходимости к нему итерационной последовательности метода Ньютона-Канторовича (3) устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть операторы T и Q дифференцируемы по Фреше в некотором шаре $S(x^{(0)}, R) \subset X$ и их производные удовлетворяет на этом шаре условию Липшица с константами K и M соответственно. Пусть $x^{(0)}$ является решением уравнения $Tx = f$, так что*

$$Ax^{(0)}(0) \equiv Tx^{(0)} = f \tag{10}$$

и для каждого $x \in S(x^{(0)}, R)$ существует непрерывный линейный оператор $\left[T'(x)\right]^{-1}$, причем

$$\left\|\left[T'(x)\right]^{-1}\right\| \le b, \tag{11}$$

$$\left\|Q'(x)\right\| \le \nu \tag{12}$$

для всех $x \in S(x^{(0)}, R)$. *Тогда, если начальное приближение* $x^{(0)}$ *удовлетворяет условию*

$$\left\| Q\,x^{(0)} \right\| \le \zeta^{(0)} \qquad (13)$$

и μ *таково, что*

$$|\mu|\, b\,\nu < 1, \quad h^{(0)} = \frac{b^2 |\mu|\, \zeta^{(0)} (K + |\mu|\, M)}{(1 - |\mu|\, b\,\nu)^2} < 2, \quad r = \frac{b\,|\mu|\, \zeta^{(0)} G}{1 - |\mu|\, b\,\nu} \le R, \qquad (14)$$

где G *определено в (8), то уравнение (9) имеет в шаре* $S(x^{(0)}, r)$ *решение* x^*, *к которому сходится итерационный процесс (3) с оценкой погрешности*

$$\left\| x^{(k)} - x^* \right\| \le \frac{b\,|\mu|\, \zeta^{(0)} G}{1 - |\mu|\, b\,\nu} \left(\frac{h^{(0)}}{2} \right)^{2^k - 1}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы 2 получается непосредственно из теоремы 1, если положить в ней $D(x) = [T'(x)]^{-1}$. Проверим выполнимость условий теоремы 1.

По свойствам производных [2], из дифференцируемости операторов T и Q в шаре $S(x^{(0)}, R)$ следует дифференцируемость оператора $A = T + Q$ в том же шаре. Для произвольных $x, y \in S(x^{(0)}, R)$ будем иметь:

$$\left\| A'(x) - A'(y) \right\| = \left\| T'(x) + \mu\, Q'(x) - T'(y) - \mu\, Q'(y) \right\| \le$$
$$\le \left\| T'(x) - T'(y) \right\| + |\mu| \left\| Q'(x) - Q'(y) \right\| \le (K + |\mu|\, M) \left\| x - y \right\|,$$

то есть условие Липшица (4) выполняется с константой $L = K + |\mu|\, M$.

Далее с учетом (11), (12) и первого из условий (14) получаем

$$\left\| D(x) A'(x) - I \right\| = \left\| [T'(x)]^{-1} (T'(x) + \mu\, Q'(x)) - I \right\| = = |\mu| \left\| [T'(x)]^{-1} Q'(x) \right\| \le |\mu|\, b\,\nu < 1$$

для всех $x \in S(x^{(0)}, R)$, то есть условие (6) выполняется с константой $\delta = |\mu|\, b\,\nu$. Что касается условия (7), то оно, очевидно, выполняется с константой $\eta^{(0)} = |\mu|\, \zeta^{(0)}$ на основании выполнимости условий (10), (13):

$$\left\| A\,x^{(0)} - f \right\| \equiv \left\| A\,x^{(0)}(\mu) - f \right\| = \left\| T\,x^{(0)} + \mu\, Q\,x^{(0)} - f \right\| \le |\mu|\, \zeta^{(0)}.$$

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, из чего следует справедливость утверждения настоящей теоремы.

Теорема доказана.

Проекционно-итерационный метод. Рассмотрим теперь проекционно-итерационный метод, основанный на методе Ньютона-Канторовича, применительно к уравнению (1) с нелинейным оператором A, действу-ющим в банаховом пространстве X, дифференцируемым по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)}, R)$ этого пространства.

Согласно общей схеме проекционно-итерационных методов [9] уравнение (1) аппроксимируется последовательностью приближенных уравнений (2), где A_n – нелинейный оператор, действующий в подпространстве X_n исходного пространства ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$), дифференцируемый по Фреше, начиная с некоторого $n \ge N$, на множестве $\Omega_n = X_n \cap S(x_N^{(0)}, R)$; $f_n = P_n\, f$, P_n – линейный проектор, переводящий X на X_n ($P_n : X \to X_n$, $P_n x_n = x_n$ для $x_n \in X_n$), причем выполнены условия близости

$$\left\| A_n\, x_n - P_n\, A\, x_n \right\| \le \alpha_n, \quad \left\| A_n'(x_n) - P_n\, A'(x_n) \right\| \le \alpha_n', \qquad (15)$$

$$\left\| P_n\, A\, x - A\, x \right\| \le \beta_n, \quad \left\| P_n\, A'(x) - A'(x) \right\| \le \beta_n', \qquad (16)$$

$$\left\| P_n f - f \right\| \le \gamma_n \qquad (17)$$

для всех $x_n \in \Omega_n$, $x \in S(x_N^{(0)}, R)$, причем α_n, α_n', β_n, β_n', $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Будем считать, что производная $A_n'(x_n)$ на множестве Ω_n удовлетворяет условию Липшица

$$\left\| A_n'(x_n) - A'(y_n) \right\| \le L \left\| x_n - y_n \right\|, \quad x_n, y_n \in \Omega_n \qquad (18)$$

и для всех $x_n \in \Omega_n$ существует непрерывный линейный оператор $\Gamma_n(x_n) = [A_n'(x_n)]^{-1}$, что позволяет применить к каждому из уравнений (2), начиная с номера $n \ge N$, итерационный метод Ньютона-Канторовича и построить проекционно-итерационную последовательность приближений к решению x^* уравнения (1) по формулам:

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \left[A_n'(x_n^{(k)}) \right]^{-1} \left(A_n x_n^{(k)} - f_n \right), \quad x_{n+1}^{(0)} = x_n^{(k_n)} \qquad (19)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, k_n - 1; \quad n \ge N; \quad x_N^{(0)} \in \Omega_N \subset X).$$

Теорема о существовании решения x^* уравнения (1), области его расположения, а также сходимости процесса (19) содержится в [10].

Приведем здесь обобщение упомянутой теоремы, когда вместо обратных операторов $\Gamma(x)=[A'(x)]^{-1}$, $x\in S(x_N^{(0)},R)$ и $\Gamma_n(x_n)=[A_n'(x_n)]^{-1}$, $x_n\in\Omega_n$ требуется существование в указанных областях лишь операторов $D(x)$ и $D_n(x_n)$, близких к $\Gamma(x)$ и $\Gamma_n(x_n)$ соответственно.

Теорема 3. *Пусть оператор A дифференцируем по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)},R)\subset X$, а оператор A_n для $n\ge N$ дифференцируем на множестве $\Omega_n=X_n\cap S(x_N^{(0)},R)$ и его производная $A_n'(x_n)$ удовлетворяет на Ω_n условию Липшица (18). Пусть выполняются условия близости (15)-(17), а также существуют линейные непрерывно обратимые операторы $D(x)$, обладающий свойствами (5), (6) для всех $x\in S(x_N^{(0)},R)$, и $D_n(x_n)$ такие, что*

$$\|D_n(x_n)A_n'(x_n)-I\|\le\delta_n<1 \qquad (20)$$

для всех $x_n\in\Omega_n$, $n\ge N$. Если начальное приближение $x_N^{(0)}\in\Omega_N$ удовлетворяет условиям

$$\|A_N x_N^{(0)}-f_N\|\le\eta_N^{(0)}, \qquad (21)$$

$$h_N^{(0)}=b_N^2\,\eta_N^{(0)}L<2,\quad r_N=b_N\,\eta_N^{(0)}H_N\le R,\quad b_N=\frac{b}{1-b(\alpha_N'+\beta_N')-\delta},$$

где

$$H_N=G_N+\sum_{i=N}^{\infty}\left(\frac{h_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_i}-1}<2G_N,\ G_N=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{h_N^{(0)}}{2}\right)^{2^i-1}, \qquad (22)$$

$Z_i=\sum_{m=N}^{i}(k_m-1)$, *то уравнение (1) имеет в шаре $S(x_N^{(0)},r_N)\subset X$ решение x^*, к которому сходится процесс последовательных приближений $\{x_n^{(k_n)}\}$, определяемый формулами (19), с оценкой погрешности*

$$\|x_n^{(k_n)}-x^*\|\le b_N\,\eta_N^{(0)}V_n\left(\frac{h_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_n}-1},$$

где

$$V_n=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{h_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_n}(2^i-1)}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{h_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_i}-2^{Z_n}}<2G_N. \qquad (23)$$

Доказательство теоремы 3 можно найти в [9].

Рассмотрим теперь следствие из теоремы 3 для случая, когда операторное уравнение (1), заданное в банаховом пространстве X, зависит от числового параметра μ в соответствии с (9), а уравнения (2), заданные в подпространствах $X_n\subset X$, имеют вид

$$A_n x_n(\mu)\equiv T_n x_n+\mu Q_n x_n=f_n. \qquad (24)$$

Теорема 4. *Пусть операторы T и Q дифференцируемы по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)},R)\subset X$, а операторы T_n и Q_n для $n\ge N$ дифференцируемы на множестве $\Omega_n=X_n\cap S(x_N^{(0)},R)$ и их производные $T_n'(x_n)$ и $Q_n'(x_n)$ удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с константами K и M соответственно. Пусть выполняются условия близости (17),*

$$\|T_n x_n-P_n T x_n\|\le\tau_n,\quad \|Q_n x_n-P_n Q x_n\|\le\theta_n, \qquad (25)$$
$$\|T_n'(x_n)-P_n T'(x_n)\|\le\tau_n',\quad \|Q_n'(x_n)-P_n Q'(x_n)\|\le\theta_n'$$

для всех $x_n\in\Omega_n$, причем $\tau_n,\tau_n',\theta_n,\theta_n'\to0$ при $n\to\infty$,

$$\|P_n T x-T x\|\le\chi_n,\quad \|P_n Q x-Q x\|\le\lambda_n, \qquad (26)$$
$$\|P_n T'(x)-T'(x)\|\le\chi_n',\quad \|P_n Q'(x)-Q'(x)\|\le\lambda_n'$$

для всех $x\in S(x_N^{(0)},R)$, причем $\chi_n,\chi_n',\lambda_n,\lambda_n'\to0$ при $n\to\infty$; для всех $x\in S(x_N^{(0)},R)$ существует непрерывный линейный оператор $[T'(x)]^{-1}$, обладающий свойством (11), и выполняется условие (12); для всех $x_n\in\Omega_n$, $n\ge N$ существуют непрерывные линейные операторы $[T_n'(x_n)]^{-1}$ такие, что

$$\|[T_n'(x_n)]^{-1}Q_n'(x_n)\|\le\nu_n. \qquad (27)$$

Пусть $x_N^{(0)}\in\Omega_N$ является решением уравнения $T_N x_N=f_N$, то есть

$$A_N x_N^{(0)}(0)\equiv T_N x_N^{(0)}=f_N. \qquad (28)$$

Тогда, если начальное приближение $x_N^{(0)}$ удовлетворяет условию

$$\left\| Q_N\, x_N^{(0)} \right\| \le \zeta_N^{(0)} \qquad (29)$$

и μ *таково, что*

$$|\mu|\, b\, \nu < 1\,, \quad |\mu|\, \nu_n < 1\,, \quad h_N^{(0)} = b_N^2\, |\mu|\, \zeta_N^{(0)} (K + |\mu|\, M) < 2\,, \qquad (30)$$

$$r_N = b_N\, |\mu|\, \zeta_N^{(0)} H_N \le R\,, \quad b_N = \frac{b}{1 - b\,(\tau'_N + \chi'_N + |\mu|\,(\theta'_N + \lambda'_N + \nu)}\,,$$

где H_N *определено в (22), то уравнение (9) имеет в шаре* $S(x_N^{(0)}, r_N) \subset X$ *решение* $x^* \equiv x^*(\mu)$*, к которому сходится проекционно-итерационный процесс (19) с оценкой погрешности*

$$\left\| x_n^{(k_n)} - x^* \right\| \le b_N\, |\mu|\, \zeta_N^{(0)}\, V_n \left(\frac{h_N^{(0)}}{2} \right)^{2^{Z_n} - 1}\,,$$

где V_n *дается формулой (23),* $Z_n = \sum_{m=N}^{n} (k_m - 1)$.

Доказательство. Утверждение настоящей теоремы получается непосредственно из теоремы 3, если положить в ней $D(x) = [T'(x)]^{-1}$, $D_n(x_n) = [T'_n(x_n)]^{-1}$. Доказательство проводится также, как и доказательство теоремы 2. Отметим лишь, что выполнимость условий близости (25), (26), очевидно, влечет выполнимость условий (15), (16) соответственно, при этом $\alpha_n = \tau_n + |\mu|\,\theta_n$, $\alpha'_n = \tau'_n + |\mu|\,\theta'_n$, $\beta_n = \chi_n + |\mu|\,\lambda_n$, $\beta'_n = \chi'_n + |\mu|\,\lambda'_n$ ($n \ge N$).

Теорема доказана.

Выводы. Сформулированные и доказанные в данной работе теоремы могут быть применены к исследованию конкретных функциональных уравнений, в частности, нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений, а также операторных уравнений, возникающих в теории возмущений и задачах приближенного построения конформных отображений.

Библиографические ссылки

1. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ и прикладная математика / Л. В. Канторович // УМН. – 1948. – Т. 3, № 6. – С. 89-85.
2. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – СПб., 2004. – 816 с.
3. **Мысовских И.П.** О сходимости метода Л.В. Канторовича для решения нелинейных уравнений и его применениях / И. П. Мысовских // Вестник ЛГУ.– 1953.– № 11.– С. 25-48.
4. **Altman M.** Connections between the method of steepest descent and Newton's method / M. Altman // Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III. – 1957. – V. 5, № III. – P. 1031-1036.
5. **Groze S.** A class of iterative methods in Frechet spaces / S. Groze – Prepr.: Res. Sem. – Babes-Bolyai Univ. Fac. Math. and Phys. – 1987. – № 5. – P. 28-35.
6. **Petryshyn W.V.** Projection methods in nonlinear numerical functional analysis / W. V. Petryshyn // J. Math. and Mech. – 1967. – V. 17, № 4. – P. 353-372.
7. **Балашова С.Д.** Проекционно-итерационные методы решения уравнений в нормированных пространствах: дис. на соиск. ученой степ. канд. физ.-мат. наук / С. Д. Балашова – Д., 1974. – 135 с.
8. **Тавадзе Л.Л.** К вопросу о сходимости метода Ньютона при условиях типа Коши / Л. Л. Тавадзе // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. –Д., 1997. – С. 152-155.
9. **Тавадзе Л.Л.** Проекционно-итерационные методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа: дис. на соиск. ученой степ. канд. физ.-мат. наук / Л. Л. Тавадзе – Д., 1995. – 152 с.
10. **Балашова С.Д.** Об одном подходе к решению эллиптических нелинейных задач / С. Д. Балашова, Л. Л. Тавадзе // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д., 1996. – С. 24-29.

Надійшла до редколегії 1.05.11.