Питання прикладної математики і математичного моделювання. Д., 2014

УДК 532.62:541.124

О.В. Санто, І.С. Тонкошкур
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЙ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ ПО ПОВЕРХНІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Розглянуто задачу про сумісну течію двох взаємно нерозчинних рідких плівок і газу в прямокутному каналі під дією сили тяжіння. За допомогою методу малих збурень одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки вздовж поверхні пластини.

Рассмотрена задача о совместном течении двух взаимно нерастворимых жидких пленок в прямоугольном канале под действием силы тяжести. С помощью метода малых возмущений получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности пластины.

The problem about cooperative courses of two insoluble liquid films in rectangular channel under gravity force was considered. Using method of the small perturbations was received approximate equations' solution of liquid film's dynamic on the surface plate.

Ключові слова: двошарова рідка плівка, газовий потік, метод малого параметра, прямокутний канал.

Вступ. Плівкові течії рідин широко застосовуються в різних технологічних процесах і апаратах, зокрема в хімічних реакторах. Важливою вимогою до цих апаратів є організація течії рідкої плівки таким чином, щоб всі її шари мали певну швидкість відносно нерухомої стінки. Одним зі способів організації такої течії є рух плівки робочої рідини не по поверхні твердої стінки, а по плівці допоміжної рідини, що «змащує» тверду стінку.

Дослідження течій двошарових плівок проводилися в роботах [2–4]. У [2; 3] розглядались плівкові течії у вузьких щілинах без газового потоку, в [4] – течії на пластині із зустрічним потоком газу, дія якого враховувалася наближено (за допомогою задання дотичного напруження на поверхні розділу «рідина – газ»). У даній роботі пропонується методика наближеного розрахунку трьохфазної течії двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі.

Постановка задачі. Розглядається задача про стаціонарну сумісну течію двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі поперечного розміру $2r$. По обох внутрішніх стінках каналу стікають рідкі плівки. Припускається, що плівки є нерозчинними одна в другій, а хімічні реакції відсутні. На плівки діє сила тяжіння, а також газовий потік усередині каналу, направлений вверх або вниз. Вісь x направлена вертикально вниз, y – в поперечному напрямку.

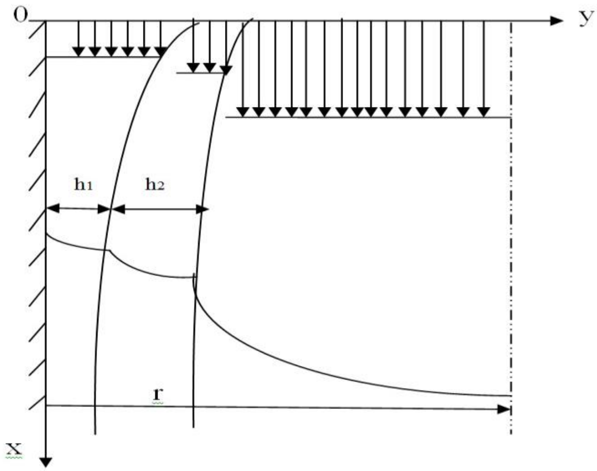

Рис. 1. Схема трифазної течії

Для опису течії рідких плівок застосовується модель в'язкої рідини, яка базується на рівняннях Нав'є-Стокса, нерозривності і макроскопічного балансу:

для рідких плівок

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} + \upsilon_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right) + g,$$

$$u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial y} + \upsilon_i \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}\right),$$

(1)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h_1} u_1 dy = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\int_{h_1}^{h_1+h_2} u_2 dy = 0.$$

для газової фази

$$u_G\frac{\partial u_G}{\partial x} + v_G\frac{\partial u_G}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_G}\frac{\partial p_G}{\partial x} + \upsilon_G\left(\frac{\partial^2 u_G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}\right),$$

$$u_G\frac{\partial v_G}{\partial x} + v_G\frac{\partial v_G}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_G}\frac{\partial p_G}{\partial y} + \upsilon_G\left(\frac{\partial^2 v_G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_G}{\partial y^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_G}{\partial x} + \frac{\partial v_G}{\partial y} = 0,$$

де u и v – компоненти вектора швидкості, p – тиск, ρ – густина рідини, υ – коефіцієнт кінематичної в’язкості, h_1, h_2 – товщини першої і другої плівок відповідно, g – прискорення вільного падіння, i =1, 2 (індекси 1, 2 відповідають номеру рідкої плівки, G – газу).

На поверхнях розділу ставляться такі крайові умови:

1) на поверхні твердого тіла (при $y = 0$) – умова «прилипання»

$$u = v = 0, \qquad (3)$$

2) на міжфазній поверхні «рідина – рідина» (при $y = h_1$) – умови рівноваги сил і неперервності швидкостей

$$p_{n_1} = p_{\sigma_1} + p_{n_2},\ p_{\tau_1} = p_{\tau_2},\ u_{n_1} = u_{n_2},\ u_{\tau_1} = u_{\tau_2}, \qquad (4)$$

3) на міжфазній поверхні «рідина – газ» (при $y = h_1 + h_2$)

$$p_{n_2} = p_{\sigma_2} + p_{n_G},\ p_{\tau_2} = p_{\tau_G},\ u_{n_G} = u_{n_2},\ u_{\tau_G} = u_{\tau_2}, \qquad (5)$$

4) на зовнішній межі газового потоку – умова симетрії (або асимптотична умова)

$$\frac{\partial u_G}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = r, \qquad (6)$$

$$(u_G \to \bar{u}_G \qquad \text{при } y \to r),$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини, p_n и p_τ – нормальна і дотична компоненти тензора напруження на міжфазній поверхні, а p_σ – капілярний тиск.

Метод розв'язування. Для спрощення вихідної системи диференціальних рівнянь застосовано метод малого параметра, за який вибрані відносні товщини плівок та газового шару: $\varepsilon = \bar{h}/l$, $\varepsilon_G = r/l$, де l – характерний повздовжній розмір, $\bar{h}$ та r – характерні поперечні розміри в рідких плівках та в газовій фазі. Введемо також характерні поздовжні швидкості в рідині $\bar{u}$ та в газі $\bar{u}_G$. У системі диференціальних рівнянь (1) – (6) перейдемо до безрозмірних змінних за такими формулами:

$$X = \frac{x}{l},\ Y = \frac{y}{\bar{h}},\ U = \frac{u}{\bar{u}},\ V_i = \frac{v_i}{\varepsilon \bar{u}},\ P_i = \frac{p_i}{\rho \bar{u}^2},\ H = \frac{h}{\bar{h}},\ H_G = \frac{h}{r},$$

$$X_G = \frac{x}{l},\ Y_G = \frac{y}{r},\ U_G = \frac{u_G}{\bar{u}_G},\ V_G = \frac{v_G}{\varepsilon_G \bar{u}_G},\ P_G = \varepsilon_G \operatorname{Re}_G \frac{p_G}{\rho_G \bar{u}_G^{\ 2}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{h}}{r},\quad \theta_0 = \frac{\rho_G \bar{u}_G^2}{\rho_1 \bar{u}^2},\ \theta_1 = \frac{\mu_G \bar{u}_G}{\mu_1 \bar{u}},\quad \theta_2 = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_G},\quad \theta_3 = \theta_0 \frac{\operatorname{Re}_1}{\operatorname{Re}_G},$$

де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, $Fr = \bar{u}^2/(g\bar{h})$ – число Фруда, $\operatorname{Re}_i = \bar{u}\bar{h}/\upsilon_i$, $\operatorname{Re}_G = \bar{u}_G r/\upsilon_G$ – числа Рейнольдса для кожної із фаз.

Будемо вважати, що виконуються такі умови: $\varepsilon << 1$, $\varepsilon \operatorname{Re}_i << 1$, $\varepsilon_G^2 \le \varepsilon_G \operatorname{Re}_G < 1$. У безрозмірному вигляді спрощена система рівнянь для швидкостей має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} = -\frac{\operatorname{Re}_1}{Fr}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0,\\ &\frac{\partial^2 U_2}{\partial Y^2} = -\frac{\operatorname{Re}_2}{Fr}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0,\\ &U_G \frac{\partial U_G}{\partial X_G} + V_G \frac{\partial U_G}{\partial Y_G} = \frac{1}{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G} \frac{\partial^2 U_G}{\partial Y^2{}_G}, \quad \frac{\partial U_G}{\partial X_G} + \frac{\partial V_G}{\partial Y_G} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Крайові умови:

$$U_1 = V_1 = 0 \qquad \text{при} \quad Y = 0,$$

$$U_1 = U_2,\ V_1 = V_2,\ \frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\operatorname{Re}_1}{\operatorname{Re}_2}\frac{\partial U_2}{\partial Y} \qquad \text{при} \quad Y = H_1,$$

$$U_G = \theta_2 U_2\,,\ V_G = \varepsilon_1\theta_2 V_2,\ \ \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \theta_1\varepsilon_1 \frac{\partial U_G}{\partial Y_G}\ \ \text{при}\ \ Y = H_1 + H_2\,, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial Y_G} = 0 \qquad\qquad \text{при}\ \ Y_G = 1\,.$$

Для розв'язання одержаної крайової задачі використовується метод збурень [1] за малими параметрами $\varepsilon_1\theta_1$ и θ_2 з урахуванням лінійних добавок. Невідомі функції подавались у вигляді розкладів за малими параметрами

$$A = A^0 + \varepsilon_1\theta_1 A^1 + \theta_2 A^2\,.$$

У результаті одержано шість спрощених систем диференціальних рівнянь, дві з яких мають тривіальний розв'язок. При інтегруванні диференціальних рівнянь для газової фази використовувався скінченно-різницевий метод. Розв'язок крайової задачі (для рідких плівок) знайдено у вигляді

$$U_1 = \frac{\mathrm{Re}_1}{Fr}\left[-\frac{Y^2}{2} + (1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{H_2}{H_1})H_1 Y\right] \pm \varepsilon_1\theta_1\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon_G \mathrm{Re}_G}}{X^{1/2}} f_0''(0)\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} Y\right\},$$

$$V_1 = \varepsilon_1\theta_1\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon_G \mathrm{Re}_G}}{4X^{3/2}} f_0''(0)\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} Y^2\right\},$$

$$U_2 = \frac{\mathrm{Re}_1}{Fr}(\frac{1}{2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{H_2}{H_1})H_1^2 + \frac{\mathrm{Re}_2}{Fr}\left[-(\frac{1}{2} + \frac{H_2}{H_1})H_1^2 + (1 + \frac{H_2}{H_1})H_1 Y - \frac{Y^2}{2}\right] \pm$$

$$\pm\,\varepsilon_1\theta_1\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon_G \mathrm{Re}_G}}{X^{1/2}} f_0''(0)\left[Y + (\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} - 1)H_1\right]\right\},$$

$$V_2 = \varepsilon_1\theta_1\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon_G \mathrm{Re}_G}}{4X^{3/2}} f_0''(0)\left[Y^2 + 2(\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} - 1)H_1 Y + (1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2})H_1^2\right]\right\}.$$

За знайденими складовими векторів швидкостей можна знайти безрозмірні товщини рідких плівок H_1, H_2:

$$H_1 = 1 \mp \varepsilon_1\theta_1 A X^{-1/2},$$

$$H_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} \mp \varepsilon_1\theta_1\left[\frac{2B}{C}\right]X^{-1/2},$$

де δ – відносна товщина плівки при відсутності руху газу, $f_0''(0)$ =0.332,

$$A = \frac{\sqrt{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G} f_0''(0) Fr}{\operatorname{Re}_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 + 2\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{-1},$$

$$B = \frac{\sqrt{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G}}{4} f_0''(0) \left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\operatorname{Re}_1}{\operatorname{Re}_2}(1 + 2\frac{\delta_2}{\delta_1})\right],$$

$$C = \frac{\operatorname{Re}_1}{Fr}(\frac{1}{2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta_2}{\delta 1}) + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Re}_2}{Fr}(\frac{\delta_2}{\delta 1})^2 .$$

Аналіз одержаних результатів. За описаною методикою проведено розрахунки течій двошарової плівки по поверхні пластини у випадках, коли газовий потік спрямований вгору (протитечія), вниз (прямотечія), а також коли рух газу відсутній.

Результати розрахунків при значеннях визначальних параметрів $\operatorname{Re}_1 = \operatorname{Re}_2 = 1$, $\operatorname{Re}_G = 100$, $Fr = 1$, $\rho_1 = \rho_2$, $\delta_1 = \delta_2$ наведені на рис. 2–3. На рис.2 показані профілі поздовжньої швидкості в рідких плівках, на рис. 3 – розподіли товщина плівок уздовж пластини у випадках прямотечії, протитечії і відсутності течії газу.

Як видно з рисунків, рух газу може призводити до значних змін картини течії. Так, у випадку прямотечії товщини плівок зменшуються, а у випадку протитечії – збільшуються, причому при зростанні координати X вплив газової складової зменшується.

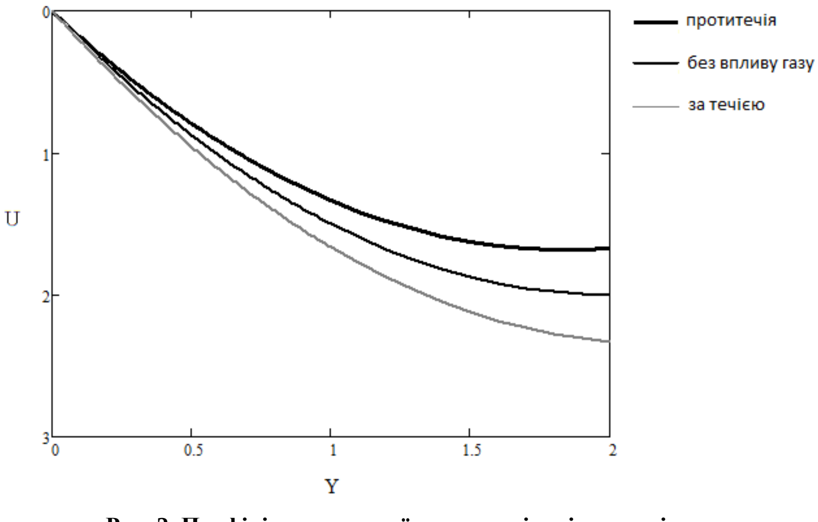

Рис. 2. Профілі поздовжньої швидкості в рідких плівках

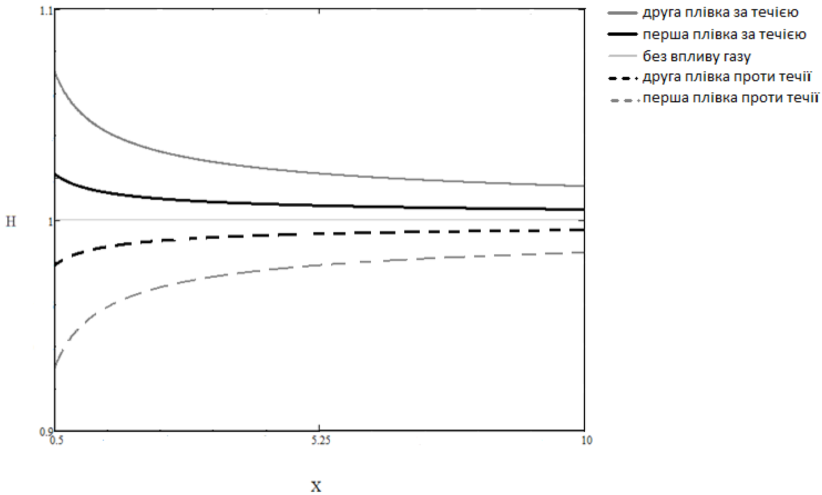

Рис. 3. Розподіл товщин плівок уздовж пластини

Висновки. За допомогою метода малих збурень розроблена методика розв’язання задачі про стаціонарну трифазну течію двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі під дією сили тяжіння. Одержано аналітичні вирази для профілів швидкостей і товщин рідких плівок в залежності від фізичних параметрів задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Бояджиев Х.** Массоперенос в движущихся пленках жидкости / Х. Бояджиев, В. Бешков. – М. : Мир, 1988. – 137 с.
2. **Захаров М. К.** Совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели / М. К. Захаров, В. Г. Айнштейн // Теоретические основы химической технологии. – 1993. – Т. 27, № 5. – С. 462–467.
3. **Захаров М. К.** Противоточное совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели / М. К. Захаров, В. Г. Айнштейн, Дж. Л. Локшин // Теоретические основы химической технологии. – 2000. – Т. 34, № 3. – С. 261–264.
4. **Захаров М. К.** Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока / М. К. Захаров, А.Ю. Комков, Д. М. Павленко // Вестник МИТХТ. – 2008. – №3. – С. 70–74.

Надійшла до редколегії 23.05.2014